

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 1 de 45

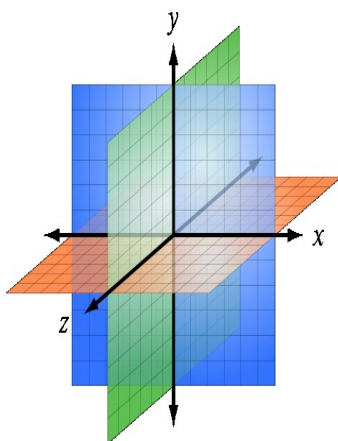
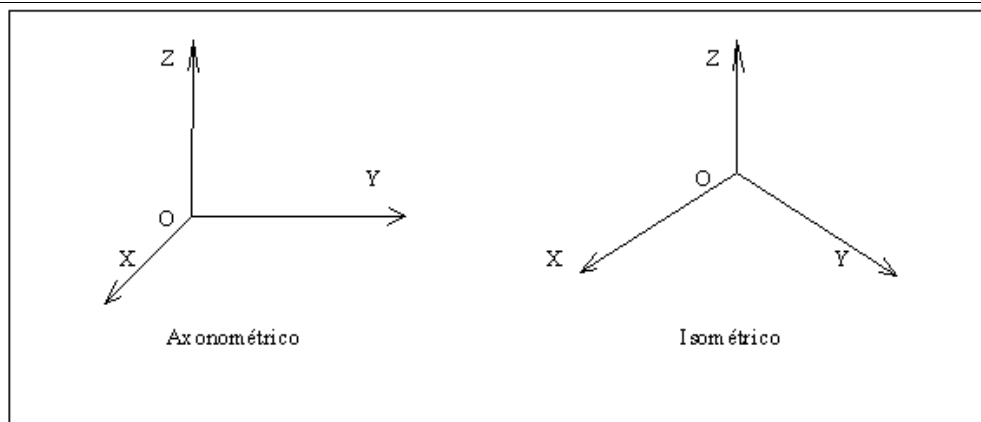
“Las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos”

Información general de la asignatura Nombre: Cálculo III Programa académico: Ingeniería Electrónica - Ingeniería Industrial	
Prerrequisitos para el aprendizaje Académicos: conocimientos sobre el concepto y cálculo de la derivada; la integral de una función de valor real. Personales: disposición y deseos de aprender, ser responsable y contar con tiempo suficiente para el desarrollo de las diferentes actividades propuestas.	Requerimientos técnicos: Correo institucional
Referencias Texto 1: Stewart, J. (2018) Calculo. Trascendentes tempranas. (8 ed.) México: Cengage. Texto 2: Smith, R. Milton, R. & Rafhi, Z. (2019) Calculo: trascendentes tempranas. (5 ed.) México: McGraw – Hill Education.	Contenido de la asignatura por temáticas Tema 1. Funciones de varias variables y superficies. (2 semanas) Tema 2. Diferenciación parcial (6 semanas) Tema 3. Integrales Múltiples (4 semanas) Tema 4. Calculo Vectorial (4 semanas)
Actividades	Por parte del docente: presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas para la asignatura. Por parte del estudiante: Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo y demás sugeridas por el docente Realización del proyecto de curso
Evaluación de la asignatura	Examen parcial (20%) – semana 8 Examen Final (20%) – Semana 17 Seguimiento (60%) – 4 eventos evaluativos del 10% cada uno, un proyecto de curso y su respectiva exposición (10%), coevaluación de la exposición (5%) y autoevaluación (5%)

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 2 de 45

Ruta de aprendizaje

Tema 1. Funciones de varias variables y superficies (2 semanas)	
Evaluación	Evento evaluativo de la temática Semana 3 Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Identificar una función de varias variables desde su definición, el reconocimiento de su dominio, su rango y su grafica. Utilizar los conceptos relacionados con una función de varias variables en la solución de problemas en diferentes contextos
Criterios de desempeño	Reconocer una función de varias variables como objeto matemático Identificar el dominio y el rango de una función Operar con diferentes funciones Reconocer gráficamente una función Graficar un mapa de contornos de una función de dos variables Identificar diferentes tipos de superficies cuádricas básicas. Modelar diferentes problemas por medio de una función.
Guía de trabajo Pregunta Orientadora ¿Es posible desde el estudio de las funciones de varias variables acercarse al desarrollo de conceptos importantes para el trabajo en ingeniería? Preliminares: Introducción al Espacio Numérico Tridimensional Definiciones 1. Todo conjunto numérico de 3 elementos se llama terna o triada ordenada. 2. El conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales constituye el llamado espacio numérico tridimensional. Cada terna ordenada de números reales se puede situar en el espacio como un punto y a cada punto en el espacio se le puede asignar una terna de números reales.	



Coordenadas rectangulares en el espacio

Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera en el espacio entonces:

1. la coordenada x de P es la distancia a la cual se encuentra P del plano yz
2. la coordenada y de P es la distancia a la cual se encuentra P del plano xz
3. la coordenada z de P es la distancia a la cual se encuentra P del plano xy

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio:

las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos está dado por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Para recordar y tener en cuenta:

1. si $\vec{v}$ tiene a $p_0(x_0, y_0, z_0)$ como punto inicial y $p_1(x_1, y_1, z_1)$ como punto final entonces $\vec{v} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$
2. dados los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ su producto escalar este dado por $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
3. si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \cos \theta$
4. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ si y solo si los vectores son ortogonales
5. dados los vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ su producto vectorial se define como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

6. si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ entonces $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin \theta$
7. $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ si y solo si los vectores son paralelos.

Planos en el espacio

Si $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ es un vector no nulo y $p_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos para los cuales los vectores $\vec{N}$ y $\overrightarrow{p_0 p}$ son ortogonales definen un plano.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \overrightarrow{p_0 p} &= 0 \\ \langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

esta última conocida como la ecuación del plano, que además puede expresarse así:

$$\begin{aligned} ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 &= 0 \\ ax + by + cz + d &= 0 \end{aligned}$$

Podemos observar que la ecuación de un plano en el espacio es entonces una ecuación lineal en las variables x, y, z donde a, b y c no son todos cero simultáneamente.

Nota:

Si dos planos son paralelos entonces sus vectores normales también son paralelos.

Si dos planos son perpendiculares entonces sus vectores normales también son perpendiculares.

Ejercicio 1

1. Obtenga una ecuación del plano que contenga al punto $P(3, 1, 2)$ y que tenga a $\vec{N} = \langle 1, 2, -3 \rangle$ como vector normal.

2. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3,4,1)$, $(1,7,1)$ y $(-1,-2,5)$.

3. Calcule el ángulo entre los planos $2x - 4y - 5z = 2$ y $x + 2y + z = 1$.

Rectas en el espacio

Recuerde que: dos vectores son paralelos si uno de ellos es múltiplo escalar del otro, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{q}$ si existe un escalar $t \neq 0$ tal que $\vec{r} = t\vec{q}$

Definición: Sea $\vec{R} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ es un vector no nulo y $p_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto dado, por p_0 pasa una y sola una recta que es paralela a $\vec{R}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p_0p} &= t\vec{R} \\ x - x_0 &= ta \\ y - y_0 &= tb \\ z - z_0 &= tc\end{aligned}$$

de esta expresión se deducen las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta.

Ejercicio 2

- Encuentre las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-3,2,4)$ y $(6,1,2)$.
- Hallar ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,-1,1)$ y es perpendicular al plano $x + y - z = 0$

Funciones de varias variables

En la vida diaria nos encontramos con fenómenos naturales o sociales que dependen del comportamiento de algunos otros.

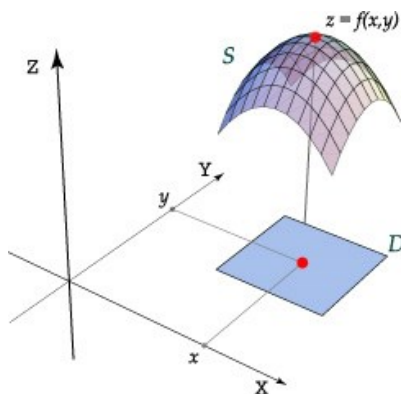
Por ejemplo, sabemos que la temperatura (T) de un punto en nuestro planeta, depende (entre otras posibilidades) de la latitud (x) y la longitud (y) del punto. En este caso podemos decir que la temperatura es una función de dos variables y escribimos $T = f(x, y)$.

Ahora, si también suponemos que la temperatura depende de la hora del día (t) en la que nos encontremos entonces $T = f(x, y, t)$, y tendremos una función de tres variables

Funciones de dos variables

Sea D un conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales. Una función en las variables independientes x e y es una regla que asocia a cada par ordenado (x, y) de D un único valor real denotado $z = f(x, y)$. El dominio de la función es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y el rango es el conjunto de todos los números reales para los cuales se satisface que, $z = f(x, y)$.

Gráficamente,



Ejercicio 3: Determine el dominio de las siguientes funciones y grafíquelo en el plano xy

1. $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
2. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
4. $f(x, y) = \ln(1 - xy)$
5. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$
6. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$
7. $f(x, y) = xy\sqrt{x^2 + y}$
8. $f(x, y) = y\ln(x^2 - y)$

Ejercicio de profundización 1. Estudiar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \frac{2x - \sin y}{1 + \cos x}.$$

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\tan(x + y)}.$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(x + y) \log x}.$$

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\log x \log y}.$$

$$f(x, y) = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

$$f(x, y) = \log(x + y).$$

$$f(x, y) = y^{\sin x}.$$

$$f(x, y) = \log(\log(x - y)).$$

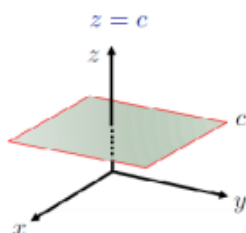
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 3}.$$

La grafica de una función en dos variables $z = f(x, y)$ es una superficie y es el conjunto de todas las ternas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen que $z = f(x, y)$

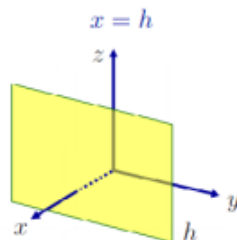
Ejemplos de algunas funciones de dos variables

1. Graficas de funciones constantes

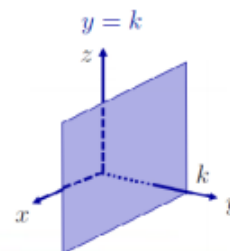
Plano paralelo al plano XY :



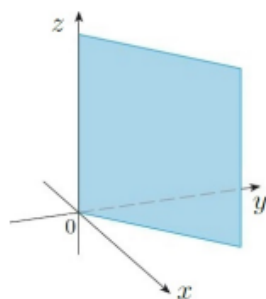
Plano paralelo al plano YZ :



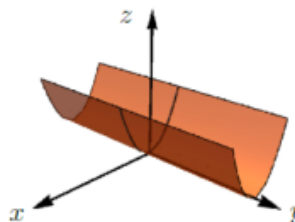
Plano paralelo al plano XZ :



2. Cuando una de las variables no aparece, su coeficiente es cero. Así esta variable es libre, resultando un tipo especial de superficie llamado superficie cilíndrica.



Gráfica de $y = x$



Gráfica de $f(x, y) = 2x^2$

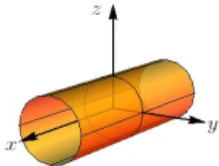
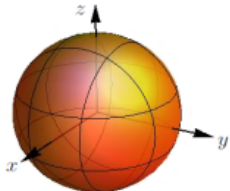
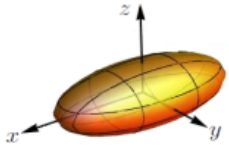
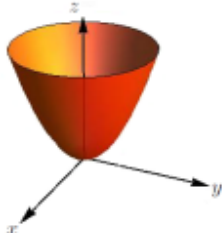
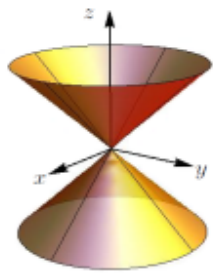
Superficies cuádricas (cuadráticas)

Una superficie cuadrática es la gráfica de una ecuación de segundo grado en las variables x, y y z . Nos interesan aquellas de la forma:

$$\begin{aligned}
 Ax^2 + By^2 + Cz^2 &= D && \text{no es función} \\
 Ax^2 + By^2 + Ez &= F && \text{si es función}
 \end{aligned}$$

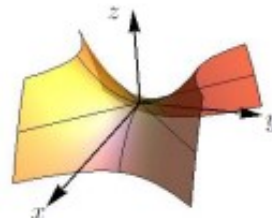
Donde A, B, C, D, E y F son constantes (A o B diferentes de cero)

La siguiente tabla resume las superficies cuádricas más comunes:

Nombre	Ecuación	Gráfica
Cilindro circular	$(y - h)^2 + (z - k)^2 = r^2$: centrado en $(\cdot, h, k)$ y abierto a lo largo del eje x .	
Esfera	$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$: centrada en (h, k, l) y con radio r .	
Elipsoide	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(z - l)^2}{c^2} = 1$: centrado en (h, k, l) y semiejes a, b y c .	
Paraboloide elíptico	$\frac{z - l}{c} = \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2}$: vértice en (h, k, l) y se abre sobre el eje z (arriba o abajo dependiendo del signo de c).	
Cono	$\frac{(z - l)^2}{c^2} = \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2}$: centrado en (h, k, l) se abre sobre el eje z .	

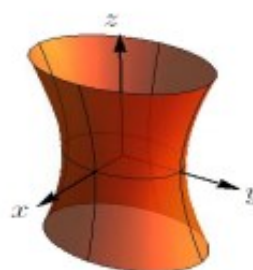
Paraboloide
hiperbólico

$$\frac{z-l}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2}$$
 : con un
 "punto de silla" en (h, k, l) . Las hipér-
 bolas tiene sus ejes sobre x y y .



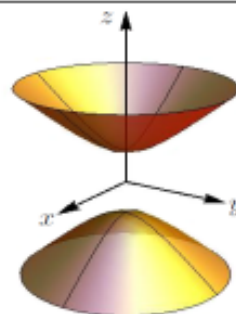
Hiperboloide elíptico
de una hoja

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$
 :
 centrado en (h, k, l) . La variable con
 signo negativo indica el eje del hiper-
 boloide.



Hiperboloide elíptico
de dos hojas

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$
 :
 centrado en (h, k, l) . La variable con
 signo positivo indica el eje del hiper-
 boloide.



Ejercicio 4. Reducir las siguientes ecuaciones a sus formas estándar. Clasificar la superficie y trazarla.

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 = -1.$$

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 1.$$

$$x^2 + 2y^2 - z = 0.$$

$$x^2 - z^2 = 0.$$

$$x^2 + 4y^2 = 100.$$

$$x^2 + y^2 + z + 4 = 0.$$

$$4x = y^2 - 2z^2.$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4y + 2z = 0.$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 4x - 4y = 0.$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0.$$

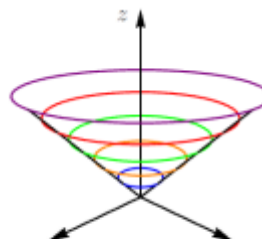
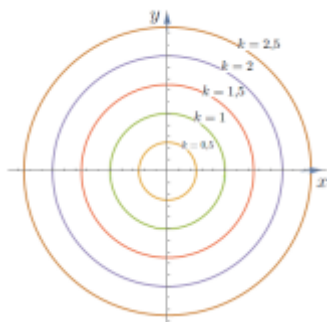
$$4x^2 - y^2 + z^2 + 8x + 8z = -24.$$

$$9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0.$$

Curvas de Nivel

Las curvas de nivel son otra herramienta muy útil para visualizar gráficas en el espacio. Consiste en un método prestado de la cartografía en el cual se unen puntos de igual elevación para formar un mapa de contornos.

Dada una función $z = f(x, y)$, la ecuación $f(x, y) = k$, para k un número real, es una curva plana llamada curva de nivel o curva de contorno de f .



Ejercicio 5

- I. Encontremos las curvas de nivel de $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ para $k = 0, 1, 3, 4$ respectivamente.
- II. para cada una de las siguientes funciones encontrar algunas curvas de nivel:
- $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$
 - $f(x, y) = y^2 - x^2$
 - $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
 - $f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2}$

Ejercicio de profundización 2. Estudiar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = |x| - y.$$

$$f(x, y) = x - |y|.$$

$$f(x, y) = |x - y|.$$

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

$$f(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

$$f(x, y) = y \operatorname{sgn}(x).$$

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 2).$$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}.$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Videos de apoyo

FUNCIONES DE DOS VARIABLES: Definición, Gráficas, Curvas de Nivel y Aplicaciones

https://www.youtube.com/watch?v=ut_igneq8EA

Ecuaciones de las superficies cuádricas

<https://www.youtube.com/watch?v=SbOw4eiBF6I>

Cuádricas 1, ¿que necesito saber para poder identificarlas?

https://www.youtube.com/watch?v=Vq1vFBf_G1c

graficas superficies en GeoGebra:

https://www.youtube.com/watch?v=VFEZVp_FgCw

Material complementario

- GeoGebra
- Symbolab

Tema 2. Diferenciación Parcial (6 semanas)

Evaluación	Evento evaluativo de la temática Semana 6 Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Reconocer los conceptos de límites y continuidad de funciones de varias variables. Aplicar la diferenciación parcial en la solución de problemas en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Utilizar los conceptos de límites y continuidad de una función en la solución de problemas en diferentes contextos. Interpretar geoméricamente la derivada de una función de dos variables. Calcular derivadas parciales de cualquier orden de una función de varias variables. Calcular derivadas parciales usando la regla de la cadena y la aplica en la solución de problemas en diferentes contextos. Calcular derivadas direccionales y gradientes y los aplica en la solución de problemas en diferentes contextos. Encontrar máximos y mínimos de funciones de dos variables. Resolver problemas de optimización que involucren funciones de varias variables.

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

¿Cómo desde el estudio de las derivadas parciales una función lograr acercamiento a conceptos fundamentales en la formación de futuros ingenieros?

Límites y Continuidad

Definición: se dice que los valores de una función en las variables independientes x, y se aproximan a un valor real L cuando (x, y) se aproxima a (a, b) ; es decir:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

sí para toda épsilon mayor que cero ($\varepsilon > 0$), existe un delta mayor que cero ($\delta > 0$) tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$.

Nota: Las propiedades conocidas para límites de funciones de una variable son válidas para funciones de dos o más variables.

Ejercicio 1. Calcular si existen los siguientes límites:

a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1-x^4y^4}{1-xy}$

b. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

c. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

d. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

e. usar coordenadas polares para demostrar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

Continuidad: la continuidad de funciones de dos o más variables se define de forma análoga a la continuidad de funciones de una variable.

Ejercicio 2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & \text{si } x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{4x^2 + y^2 - 1} & \text{si } 4x^2 + y^2 - 1 \neq 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 3x + y^2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Derivadas Parciales

Definiciones: Si f es una función de dos variables x e y entonces;

- a. la derivada parcial de f con respecto a x es aquella función denotada $f_x(x, y)$, si para cualquier punto de su dominio se tiene que $f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ existe.

Otras notaciones: $f_x(x, y) = f_x = f_1 = D_1f = \frac{\partial f}{\partial x}$

- b. la derivada parcial de f con respecto a y es aquella función denotada $f_y(x, y)$, si para cualquier punto de su dominio se tiene que $f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$ existe.

Otras notaciones: $f_y(x, y) = f_y = f_2 = D_2f = \frac{\partial f}{\partial y}$

Ejercicio 3

- utilice la definición de derivadas parciales como límites para hallar f_x y f_y de:
 - $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^2$
 - $f(x, y) = \sqrt{3x + y}$
- obtenga las derivadas parciales de las siguientes funciones:
 - $f(x, y) = 4y^3 + \sqrt{x^2 - y^2}$
 - $f(x, y) = e^{y/x} + \ln\left(\frac{y^2}{x}\right)$
 - dada $u = \sin\left(\frac{r}{t}\right) + \ln\left(\frac{t}{r}\right)$, demostrar que $t \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0$
 - demuestre que la función $P = bL^\alpha K^\beta$ satisface que $L \frac{\partial P}{\partial L} + K \frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$
- hallar todos los valores de x e y tales que f_x y f_y son simultáneamente iguales a cero.
 - $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$
 - $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$

Ejercicio de profundización 1

A. Encontrar en cada caso las derivadas parciales f_x y f_y para las funciones:

$$f(x, y) = xe^{x^2+y^2}.$$

$$f(x, y) = \cos(y\sqrt{x}) \sin(x\sqrt{y}).$$

$$f(x, y) = 7x^2 - \log(\cos x \cos y).$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

B. Evaluar las derivadas parciales de las funciones dadas en los puntos indicados:

$$f(x, y) = e^{ax} \cos(bx + y), \left(\frac{2\pi}{b}, 0\right).$$

$$f(x, y) = (4cx^2)^y - (4cy^2)^x, \left(c, \frac{c}{2}\right).$$

$$f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y), (0, 0).$$

C. Calcular las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes:

$$f(x, y) = \int_x^{xy} g(t) dt.$$

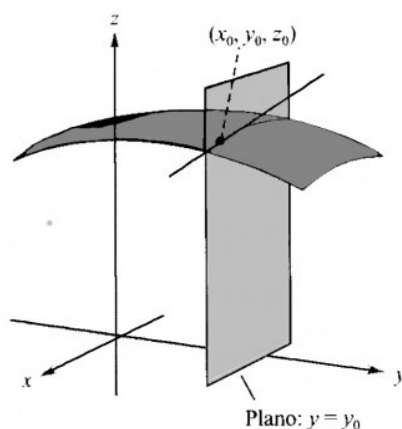
$$f(x, y) = \int_{xy}^{y^x} g(t) dt.$$

$$f(x, y) = \int_{\int_y^x g(t) dt}^{\int_x^y g(t) dt} g(t) dt.$$

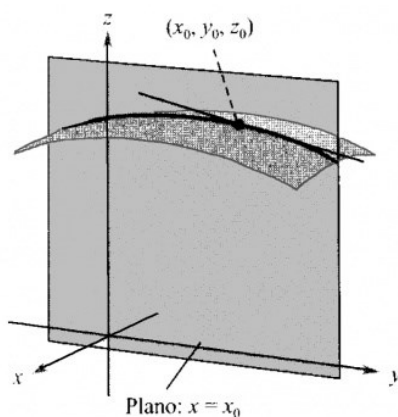
D. Hallar α tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, con $f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y + \alpha \cos x \cos y$

Interpretación geométrica

$f_x(x, y)$ evaluada en el punto (x_0, y_0) es la pendiente de la recta tangente a la grafica que resulta por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$.



$f_y(x, y)$ evaluada en el punto (x_0, y_0) es la pendiente de la recta tangente a la grafica que resulta por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$.



Ejercicio 4: Encuentre la pendiente de la recta tangente a la superficie $z = 9 - x^2 - y^2$ en $(2,1,4)$ con el plano

- a. $x = 2$
- b. $y = 1$

Derivación implícita

Teorema

- Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define una función implícita de y como función de x , entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$

Ejercicio 5: Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si

- a. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
- b. $6x + \sqrt{x^3 y} = 3xy - 4$
- c. $2x^3 - 3x^2 y = x^4 + y^4$

- Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ determina una función implícita de z como función de x e y , entonces $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

Ejercicio 6: Encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

- d. $xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1$
- e. $yx^2 + z^2 + \cos(xyz) = 4$

Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función en las variables independientes x e y entonces, las funciones definidas como f_x y f_y son también derivables con respecto a x e y .

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Teorema de Clairant

Si $f(x, y)$ y las derivadas f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región del plano xy que contenga al punto (x_0, y_0) entonces $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Nota: las derivadas anteriores se llaman derivadas cruzadas o mixtas

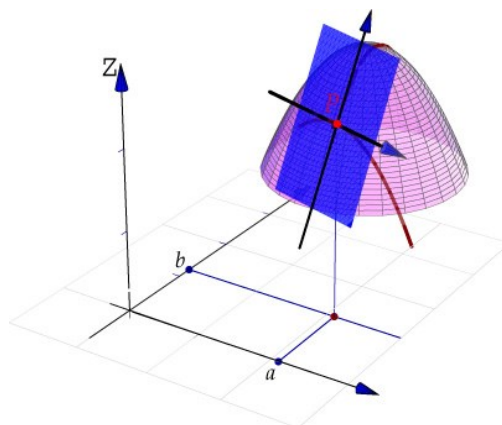
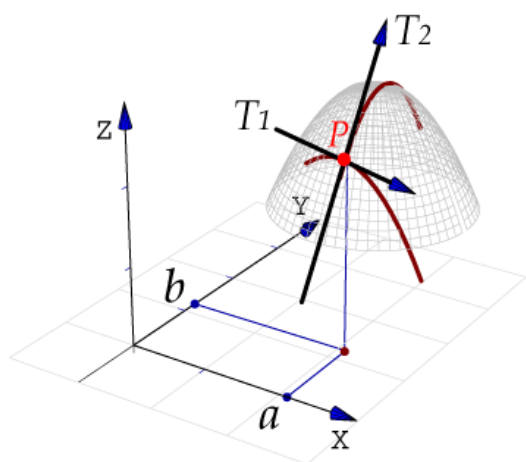
Ejercicio 7:

1. Verifique que $u_{xy} = u_{yx}$ para $u = \sin^2 x \cos y$
2. Determine si las siguientes funciones satisfacen la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ conocida como la ecuación de Laplace en el plano:
 - a. $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$
 - b. $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{x^2 + y^2}$
3. verifique que la función $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ satisface la ecuación de Laplace en el espacio $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

Planos Tangentes

Sea S una superficie con ecuación $z = f(x, y)$ cuyas derivadas parciales de primer orden existen en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de S . Sean además c_1 y c_2 las curvas que se obtienen por la intersección de la superficie S con los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ respectivamente.

Si T_1 y T_2 son respectivamente las rectas tangentes a las curvas c_1 y c_2 en $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces se llama plano tangente al determinado por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y las rectas T_1 y T_2 .



Definición

Si $z = f(x, y)$ es una superficie S cuyas derivadas parciales de primer orden existen en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ entonces la ecuación del plano tangente a S en el punto dado es:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ejercicio 8: Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto que se indica

1. $z = \sin(x + y)$, $P_0(1, -1, 0)$
2. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $P_0(2, -2, 4)$
3. $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, $P_0(1, -1, 1)$
4. $2x^2 + y^2 - z^2 = -22$, $P_0(1, -1, 5)$

Ejercicio de Consulta Evaluable: Encuentre la linealización $L(x, y)$ de $f(x, y) = \tan^{-1}(x + 2y)$ en el punto $P(1, 0, \pi/4)$

Definición: Si $z = f(x, y)$ y si nos movemos de un punto (x_0, y_0) a $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ entonces la diferencial resultante en la función, llamada diferencial total o diferencial exacta se estima mediante la expresión:

$$dz = df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Ejercicio 9:

- a. Encuentre la diferencial total o exacta de la función $z = x \cos y - y \sin x$
- b. Hallar una aproximación a la variación de la longitud que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm, cuando el primero se alarga un cuarto de centímetro y el segundo se acorta un octavo de centímetro.
- c. Al medir un bloque de concreto, han resultado para sus dimensiones los valores 10, 12 y 20 cm, con un error probable de 0.05 en cada uno. Hallar aproximadamente el máximo error que se puede cometer al evaluar el área total de bloque.
- d. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 cm y el ángulo que forman es de $\pi/3$. Sabiendo que los posibles errores en la medición son de 0.2 cm en la medida de los lados y de $\pi/180$ en la del ángulo, hallar el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área.
- e. La longitud y ancho de un rectángulo son 30 y 40 cm. Respectivamente, con un margen de error en la medición de 0.1 cm. En cada dimensión. Usar diferenciales para estimar el máximo error en el área calculada del rectángulo.

Reglas de la cadena

1. si $w = f(x, y)$ es una función diferenciable de x e y , si además $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t , entonces, w es una función diferenciable de t dada por:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

2. si $w = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y, z , si además $x = g(t)$, $y = h(t)$ y $z = r(t)$ son funciones diferenciables de t , entonces, w es una función diferenciable de t dada por:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

3. si $w = f(x, y)$ es una función diferenciable de x e y , si además $x = g(r, s)$ y $y = h(r, s)$ son funciones diferenciables de r y s , entonces, w es una función diferenciable de r y s dada por:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

Ejercicio 10:

- a. si $f(u, v, w)$ con $u = x - y$, $v = y - z$, $w = z - x$. Muestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

- b. encuentre $\frac{dw}{dt}$ si $w = e^{2x+3y} \cos 4z$, $x = \ln t$, $y = \ln(t^2 + 1)$, $z = t$

- c. si $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $x = e^r \cos(s)$, $y = e^r \sin(s)$, $z = e^s$ hallar $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$

- d. la altura de un cilindro circular recto disminuye a razón de 10 cm/min y el radio crece a razón de 4 cm/min. Determine la razón de cambio del volumen en el instante en que la altura es de 50 cm y el radio 16 cm.

- e. La altura de un cono circular recto mide 15 cm. Y aumenta a razón de 0.2 cm/min. El radio de la base mide 10 cm y disminuye a razón de 0.3 cm/min. Hallar la variación del volumen con respecto al tiempo.

Derivada direccional

Teorema: Si f es una función diferenciable en las variables independientes x, y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ denotada $D_{\vec{u}}f$ esta dada por: $D_{\vec{u}}f = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta$

Si a y b son respectivamente las componentes del vector unitario, entonces $D_{\vec{u}}f = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$.

¿Cómo interpretamos la derivada direccional si $\theta = 0$, o si $\theta = \pi/2$?

Nota: si se da la dirección mediante un vector no unitario, este se debe normalizar para poder calcular la derivada direccional. ¿Cómo se encuentra un vector unitario en la dirección de un vector unitario no nulo $\vec{A}$?

Ejercicio 11:

1. hallar $D_{\vec{u}}f$ de las funciones dadas en la dirección de $\vec{u} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

a. $f(x, y) = xe^y$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

b. $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

2. hallar $D_{\vec{u}}f$ en el punto indicado y en la dirección correspondiente.

c. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$, $P(3, 4)$

d. $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $\vec{v} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$, $P(4, 3)$

Gradiente

Si f es una función diferenciable en x, y , entonces el gradiente de f denotado ∇f , es el vector $\nabla f = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$

Así la derivada direccional de f se puede definir como $D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$

Propiedades del gradiente de f

- si $\nabla f = 0$ entonces $D_{\vec{u}}f = 0$
- El valor máximo de $D_{\vec{u}}f$ es $\|\nabla f\|$ y este ocurre cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección del vector gradiente. Es decir, f toma su valor máximo en la dirección del ∇f
- El valor mínimo de $D_{\vec{u}}f$ es $-\|\nabla f\|$ y este ocurre cuando $\vec{u}$ tiene dirección opuesta a la del vector gradiente. Es decir, f toma su valor mínimo en la dirección de $-\nabla f$

Ejercicio 12.

1. Halle el valor de $D_{\vec{u}}f$ en el punto dado para la función indicada y en la dirección del vector $\vec{u}$.
 - a. $f(x, y) = y^2 \tan^2 x$, $\vec{u} = \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \rangle$, $P(\pi/3, 2)$
 - b. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{u} = \langle 2, -3 \rangle$, $P(1, 2)$
2. La temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto de una placa rectangular que esta en el plano xy esta dada por $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$.
 - a. Determine la máxima razón de cambio de la temperatura en el punto $(3, -6)$ sobre la placa.
 - b. Halle la dirección para la cual se presenta esta máxima razón de cambio.

Derivada direccional y gradiente de una función de 3 variables

Si f es una función diferenciable en x, y, z , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ denotada $D_{\vec{u}}f$ esta dada por: $D_{\vec{u}}f = f_x(x, y, z)\cos \alpha + f_y(x, y, z)\cos \beta + f_z(x, y, z)\cos \gamma = \nabla f \cdot \vec{u}$

Ejercicio 13: Halle el valor de $D_{\vec{u}}f$ en el punto P dado para la función indicada y en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$.

- a. $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$, $P(1, 0, 0)$, $Q(4, 3, 1)$
- b. $g(x, y, z) = xye^z$, $P(2, 4, 0)$, $Q(0, 0, 0)$

Ejercicio de profundización 2

A. Calcular el gradiente de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$f(x, y) = xe^{xy^3+3}.$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-z^2-x-y}.$$

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

B. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

$$f(x, y) = x + 2xy - 3y^2, (x_0, y_0) = (1, 2), \mathbf{n} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

$$f(x, y) = e^x \cos(\pi y), (x_0, y_0) = (-1, 0), \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1).$$

$$f(x, y) = x^y - y^x, (x_0, y_0) = (e, e), \mathbf{n} = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right).$$

$$f(x, y) = (x - 1)y^2 e^{xy}, (x_0, y_0) = (0, 1), \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3).$$

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, (x_0, y_0) = (a, b),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b, a).$$

$$f(x, y, z) = e^x + yze^y, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

C. Si $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ denota la altura de una montaña, ¿en qué dirección desde $(1, 0)$ se debería comenzar a caminar para escalar más rápidamente?

D. Encontrar la ecuación del plano tangente a las siguientes funciones en los puntos dados:

$$f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2} \text{ en } (1, 0), (0, 1), (-1, 1), (0, 0).$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy) \text{ en } (-\pi, 0), (0, \pi).$$

$$f(x, y) = \cos x \sin y \text{ en } (0, \frac{\pi}{2}).$$

$$f(x, y) = x - y + 2 \text{ en } (1, 1)$$

$$f(x, y) = \log(x \cos y) + \arctan(x + y) \text{ en } (1, 0)$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y) \text{ en } (0, 0)$$

$$f(x, y) = axy \text{ en } (1, \frac{1}{a})$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \text{ en } (1, -1).$$

E. Verificar en cada caso que las funciones que se dan satisfacen la condición especificada:

$$u(x, y) = e^x \sin y \text{ verifica } u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$\phi(x, t) = f(x-t) + g(x+t), \text{ con } f \text{ y } g \text{ funciones cualesquiera, verifica } \phi_{xx} = \phi_{tt}.$$

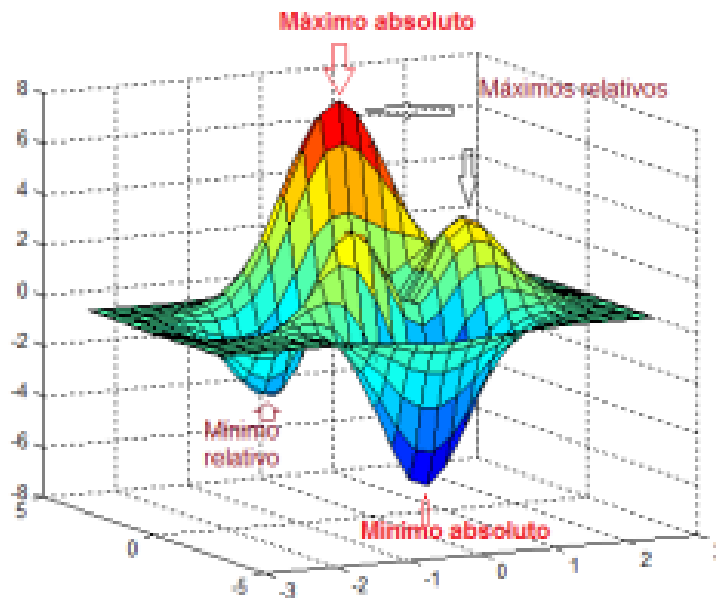
$$f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2 \text{ verifica } f_{xyz} = f_{zyx}.$$

$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}, \text{ con } f \text{ una función cualquiera, verifica}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}.$$

Extremos de una función de dos variables.

Definición. Una función $z = f(x, y)$ tiene un máximo (mínimo) en un punto $P(x_0, y_0)$ si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en cualquier otro punto (x, y) de algún entorno de P .



Condiciones necesarias de extremo. Si una función $z = f(x, y)$ diferenciable alcanza un extremo en $P(x_0, y_0)$ entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman puntos críticos o estacionarios. No todo punto crítico es un punto extremo.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos.

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto crítico de la función $z = f(x, y)$ con derivadas parciales de segundo orden continuas en P y sea $H(x_0, y_0)$ el determinante de la matriz hessiana, entonces:

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Si el hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da, $f_{xx}(x_0, y_0)$ si es negativa máxima y si es positiva mínimo). Si el hessiano es negativo no hay extremo (punto de silla). Y si el hessiano es cero, el método no es concluyente.

Ejercicio 14. Encontrar los puntos críticos de las funciones dadas y determinar su naturaleza

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy.$$

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} e^{x \sin y}.$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

$$f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

$$f(x, y) = 6000 + 6x^3 - 36xy + 3y^2;$$

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

$$f(x, y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}.$$

Ejercicio 15. Dados los puntos $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, 0)$, encontrar el punto que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias a estos cuatro puntos.

Ejercicio 16. ¿Para qué valores de k la función $f(x, y) = kx^2 + 5xy + 4y^2$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$?

Ejercicio 17. Una empresa dedicada a la producción de motores eléctricos estima que el costo diario de producción de x unidades del motor I e y unidades del motor II viene dado por la función $2x^2 + y^2 - xy$. ¿Cuántos motores de cada tipo debe producir para minimizar el coste, si diariamente debe producir un total de 96 motores?

Ejercicio Investigativo. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas

$$f(x, y, z) = x - y + z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

$$f(x, y) = 3x + 2y, \quad 2x^2 + 3y^2 = 3.$$

$$f(x, y) = xe^{xy}, \quad x^2 + y = 0.$$

$$f(x, y) = x^y, \quad x > 0, y > 0, xy = 1.$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2yz, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

$$f(x, y, z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

Videos de apoyo

Derivadas parciales. Introducción
https://www.youtube.com/watch?v=c58ZT5kt5_g
 Derivadas parciales
<https://www.youtube.com/watch?v=PSnQv0MBP7o>
 derivada parcial: interpretación geométrica
https://www.youtube.com/watch?v=F_Nj9vk9bUs
 ¿Qué es un plano tangente?
<https://www.youtube.com/watch?v=bZLN-Z9KKh8>
 Calcular un plano tangente
<https://www.youtube.com/watch?v=G--OLfVa9QA>
 Regla de la cadena para funciones de varias variables
<https://www.youtube.com/watch?v=KenzypjLuEc&t=6s>
 Derivada Direccional y Gradiente Introducción
<https://www.youtube.com/watch?v=PxkMBqRMO1s>
 Derivada direccional
<https://www.youtube.com/watch?v=RxsHHO-GVfc>
 ¿Por qué el gradiente es la dirección del ascenso más pronunciado?
<https://www.youtube.com/watch?v=YYI8-xoO0Is>
 Máximos y mínimos multivariables
<https://www.youtube.com/watch?v=rQbG8UbTXR4>
 Puntos silla
<https://www.youtube.com/watch?v=ipDwNsV4OR4>
 Criterio de la segunda derivada
<https://www.youtube.com/watch?v=JqSM3EbKB0M>
 Multiplicadores de Lagrange
<https://www.youtube.com/watch?v=v4hobyDhX4s>
 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE
https://www.youtube.com/watch?v=YDM_DoPsfV4

Material complementario

- GeoGebra
- Symbolab

	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 25 de 45

Tema 3. Integración Múltiple (4 semanas)	
Evaluación	Evento evaluativo de la temática Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Explicar los conceptos y la teoría detrás de las integrales dobles y triples, incluyendo sus propiedades y aplicaciones en diversas áreas. Resolver problemas prácticos y teóricos que involucren integrales dobles y triples en diferentes coordenadas. Aplicar las técnicas de integración múltiple para modelar y resolver problemas en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Calcular integrales dobles y triples, evitando errores comunes en el proceso de integración y manipulación algebraica. Utilizar los métodos adecuados (cambio de variables, integración en coordenadas polares, cilíndricas) para resolver integrales múltiples. Interpretar los resultados obtenidos de las integrales múltiples en el contexto del problema planteado, explicando su significado en términos físicos o geométricos.

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

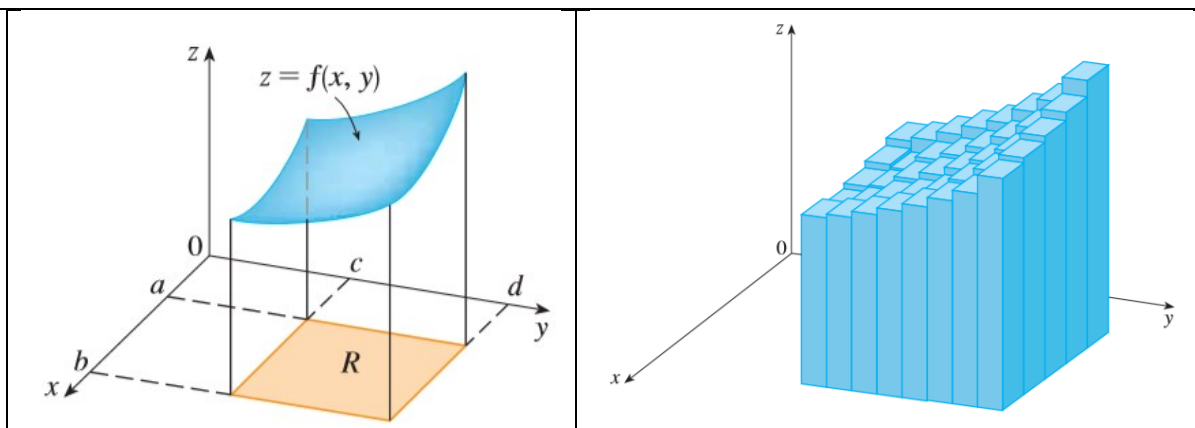
¿Qué métodos se utilizan para evaluar integrales múltiples y cuáles son sus aplicaciones prácticas en ingeniería?

Integrales Dobles

Suponga que la función f es continua en R , el rectángulo definido por $a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$. Definimos la integral definida de f sobre R , como: $\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$. Esta integral recibe el nombre de integral doble.

Interpretación geométrica de la integral doble – Teorema de Fubini

Sea una f una función continua y no negativa sobre R , entonces la integral doble, puede interpretarse como el volumen del sólido W , con base R y limitado superiormente por la superficie de ecuación $f(x,y)$, e inferiormente por $z = 0$.



$$V(W) = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

$$V(W) = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Propiedades de las integrales dobles:

- **LINEALIDAD**

La integral doble es lineal:

$$\iint_R (af(x, y) + bg(x, y)) dA = a \iint_R f(x, y) dA + b \iint_R g(x, y) dA$$

- **ADITIVIDAD DEL DOMINIO DE INTEGRACIÓN**

La integral doble es aditiva sobre rectángulos que tengan en común como mucho un segmento de recta:

$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA, \text{ si } \text{Área}(R_1 \cap R_2) = 0$$

- **ACOTACIÓN**

Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ en casi todos los puntos (en casi todos los puntos significa en todos los puntos menos en un número finito) de R , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

En consecuencia, si $f(x, y) \geq 0$ en casi todos los puntos de R ,

$$\iint_R f(x, y) dA \geq 0$$

y si $f(x, y) \leq 0$ en casi todos los puntos de R ,

$$\iint_R f(x, y) dA \leq 0$$

Ejercicio 1.

Calcular las siguientes integrales dobles.

1. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x) dy dx$

2. $\int_0^2 \int_0^4 y^3 e^{2x} dy dx$

3. $\int_0^2 \int_0^\pi r \operatorname{Sen}^2 \theta \, d\theta \, dr$
4. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \operatorname{Cos} x) \, dx \, dy$
5. $\iint_R (y + xy^{-2}) \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$
6. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1} \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$
7. $\iint_R \frac{1}{1+x+y} \, dA$, donde $R = [1, 3] \times [1, 2]$

Determine el volumen del sólido que está debajo del paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$, arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$

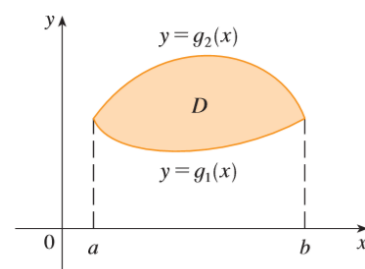
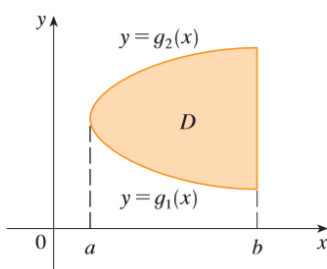
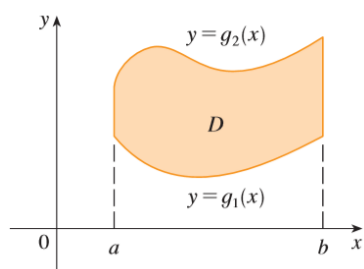
Ejercicio de profundización 1

1. Calcular las siguientes integrales dobles
 - a. $\iint_R x \operatorname{Sec}^2 y \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi/4\}$
 - b. $\iint_R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-t^2}} \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq \theta \leq \pi/3, 0 \leq t \leq 1/2\}$
 - c. $\iint_R x \operatorname{Sen}(x+y) \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi/6, 0 \leq y \leq \pi/3\}$
 - d. $\iint_R \operatorname{Sen}(x-y) \, dA$, donde $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
2. Determine el volumen del sólido que se tiende bajo el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.
3. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x^2 + xy^2$ y los planos $z = 0, x = 0, x = 5, y = \pm 2$
4. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + x^2 y e^y$ y los planos $z = 0, x = \pm 1, y = 0, y = 1$
5. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x \operatorname{Sen} y$ y los planos $z = 0, x = \pm 1, y = 0, y = \pi$

Integrales dobles en regiones mas generales

En algunas aplicaciones prácticas es necesario realizar integrales dobles sobre regiones planas mas generales, las regiones de integración pueden ser:

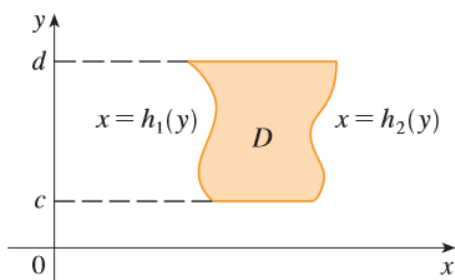
Regiones tipo I



En este caso

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Regiones tipo II



En este caso

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Ejercicio 2.

Evalué las siguientes integrales dobles

1. $\iint_D x \cos y dA$, donde D esta acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$
2. $\iint_D (x^2 + 2y) dA$, donde D esta acotada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geq 0$
3. $\iint_D y^2 dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(1, 4)$
4. $\iint_D xy^2 dA$, donde D esta encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

Calcular el volumen del solido en cada caso

5. Bajo el plano $x - 2y + z = 1$ y arriba de la región acotada por $x + y = 1 \wedge x^2 + y = 1$
6. Bajo la superficie $z = 1 + x^2y^2$ y arriba de la región acotada por $x = y^2 \wedge x = 4$
7. Bajo la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo con vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ y $(1, 2)$

Evalué las siguientes integrales cambiando el orden de integración

8. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$
9. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dy dx$
10. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) dx dy$
11. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx$

Ejercicio de profundización 2

1. Calcular $\iint_S (2y - 4x) dx dy$, siendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$

2. Calcular la siguiente integral iterada $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$

3. Calcular la siguiente integral iterada $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} \rho \operatorname{sen} \theta d\rho d\theta$

4. Calcular $\iint_R \frac{x^2}{1+y^2}$, siendo $R = [0, 1] \times [0, 1]$

5. Sea T la región triangular limitada por las rectas $y=0$, $y=2x$, $x=1$. Calcule la integral doble $\iint_T (x+y) dA$ por integración iterada.

a) Integrando primero con respecto a y. b) Integrando primero con respecto a x.

6. Dibuje la región de integración de: $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x; y) dy dx$, y exprese la integral como una integral doble equivalente con el orden de integración invertido.

7. Grafique la región sobre la cual se realiza la integración, y escriba la integral equivalente con el orden de integración invertido. Calcule ambas integrales. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy$

8. En los problemas siguientes escriba la integral iterada equivalente. No integre, haga el gráfico.

a) $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x; y) dy dx$

b) $\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x, y) dy dx$

c) $\int_0^2 \int_0^{x^3} f(x; y) dy dx$

9. Evaluar las siguientes integrales dobles

a) $\int_0^\pi \int_0^x x \operatorname{sen} y dy dx =$

b) $\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} y dy dx =$

c) $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy =$

Taller de repaso 1

1. Calcular mediante integración doble el área A de la región R en el plano xy acotada por la recta $y = x$ y por la parábola $y = x^2 - 2x$.

2. Halle el volumen del sólido que se encuentra bajo el plano $z = 2x + 5y + 1$ y arriba del rectángulo $\{(x, y) | -1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 4\}$.

3. Halle el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x\sqrt{x^2 + y}$ y los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ y $z=0$.

4. Determine el volumen del sólido dado.

a. Debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región limitada por $y = x^2$ y $x = y^2$.

b. Limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 4$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y=1$.

c. Limitado por los planos $y=0$, $z=0$, $y=x$, $6x+2y+3z=6$.

5. Calcular las siguientes integrales Múltiples:

a) $\int_0^5 \int_1^4 6xy^2 \, dy \, dx$ e) $\int_0^{1/2} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \, dx$ b) $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x^3 \cos y \, dy \, dx$

f) $\int_0^1 \int_0^x e^y \, dy \, dx$ c) $\int_0^2 \int_0^1 5x^3 \, dy \, dx$ d) $\int_0^3 \int_0^2 (x^2 + 3y) \, dy \, dx$

6. Calcular las siguientes integrales Múltiples, sobre las Regiones R indicadas:

a) $\iint xy^2 \, dy \, dx$ R: $x=2$; $y=0$
 $x=6$; $y=3$

b) $\iint 5x^3 y \, dy \, dx$ R: $x=0$; $y=0$
 $x=4$; $y=x$

c) $\iint (3x + y^2) \, dy \, dx$ R: $x=2$; $y=4$
 $x=0$; $y=x^2$

d) $\iint (y - x) \, dy \, dx$ R: $y=2x$; $x=2$
 $y=x/2$

e) $\iint x^2 \, dy \, dx$ R: $y=x-2$; $y^2=x$

7. Cambiando el orden de las variables, calcular las siguientes Integrales dobles.

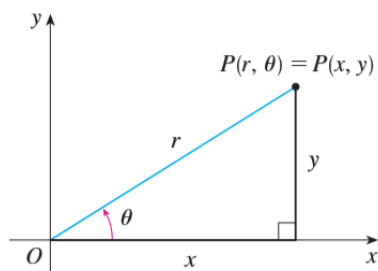
a) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3} \, dy \, dx$

b) $\int_0^2 \int_y^2 e^{-x^2} \, dx \, dy$

Integrales dobles en coordenadas polares

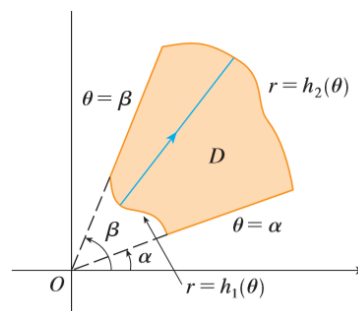
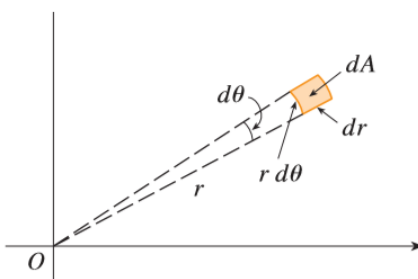
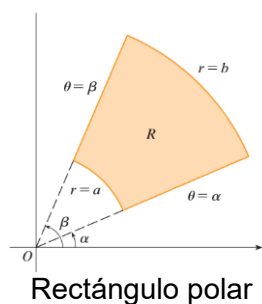
En reiteradas ocasiones evaluar una integral doble de coordenadas rectangulares o cartesianas es imposible y en otras ocasiones muy complicadas, pero si cambiamos a coordenadas polares resulta mucho más fácil.

Para la transformación usamos:



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Y si se tiene en cuenta que:



Entonces,

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

Ejercicio 3

1. Evalúe la integral dada, pasando a coordenadas polares.

a. $\iint_R y dA$, donde R es la región del primer cuadrante, limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$ y las rectas $y = x$ y $y = 0$.

b. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, donde $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

c. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dA$, donde D es la región limitada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y.

2. Evalúe la integral iterada pasando a coordenadas polares.

a. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy dx$

b. $\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$

d. $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} x^2 y^2 dx dy$

c. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

Ejercicio de profundización 3

Evalúe las siguientes integrales

1) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$

2) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$

3) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$

4) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

5) $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$

6) $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$

7) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx$

8) Calcule el volumen de solido bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$

- 9) Calcule el volumen de solido bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy
 10) Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

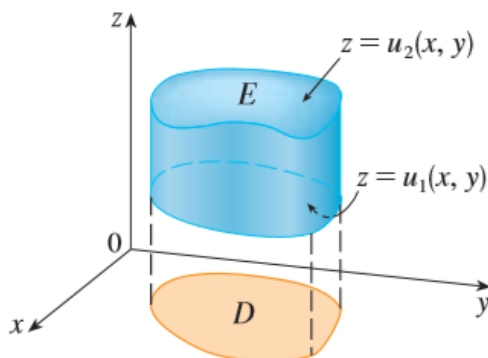
Integrales triples

Si f es continua sobre la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$ entonces,

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Nota. Para realizar esta integral iterada, se integra primero respecto a x (manteniendo a y y z constantes), luego se integra respecto a y (manteniendo a z constante) y, por último, se integra respecto a z . Hay otros cinco posibles órdenes en los que se puede integrar, los cuales dan el mismo valor

Regiones de integración más generales:



$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy$$

Ejercicio 4

A. Calcular

- $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 dx dy dz$
- $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2} dy dx dz$
- $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \text{Sen} y dz dx dy$

B. Dibujar la región sólida cuyo volumen es la integral y reescribir la integral en el nuevo orden que se indica.

4. $\int_0^4 \int_0^{\frac{4-x}{2}} \int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} dz \, dy \, dx \rightarrow dy \, dx \, dz$

5. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dx \, dy \rightarrow dz \, dy \, dx$

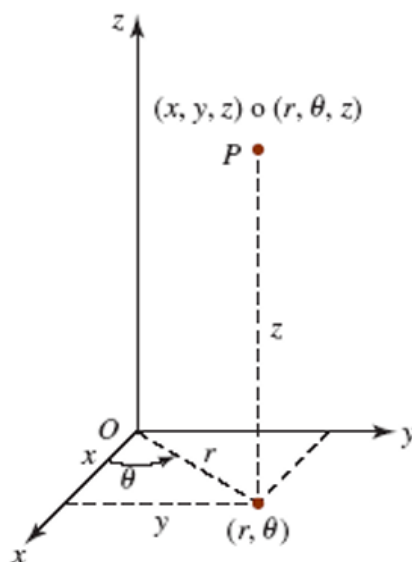
C. encuentre el volumen de la region en el primer octante, limitada por los planos $y + z = 2$ y el cilindro $x = 4 - y^2$

D. encuentre el volumen de la region cortada del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por los planos $z=0$ y $x+z=3$

E. Evalúe la integral : $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} \, dy \, dz \, dx$

Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto en el espacio representan con (r, θ) a las coordenadas polares de la proyección del punto en el plano xy y z el valor de la coordenada en el eje z . Gráficamente, un punto $P(x, y, z)$ se puede representar como



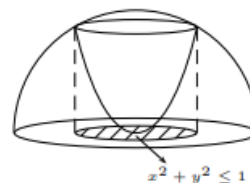
Vemos que, en el plano xy , (r, θ) son las coordenadas polares y z representa la altura del punto (x, y, z) . Así, el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas es:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z.$$

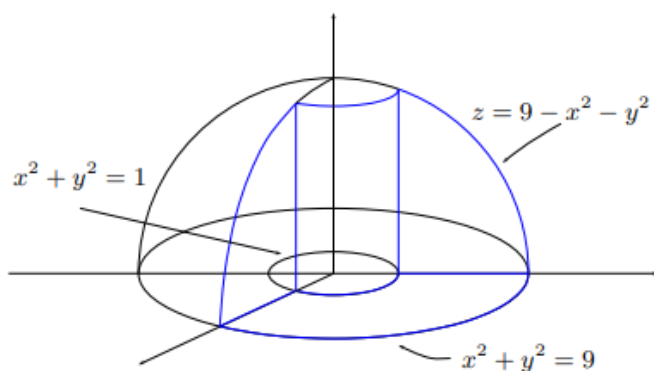
Ejercicio 5

1. Encuentre el volumen del cuerpo limitado por las superficies: use coordenadas cilíndricas

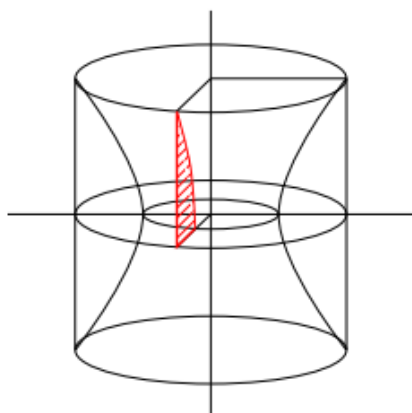
$$z = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad z = 2 - x^2 - y^2.$$



2. Hallar el volumen del sólido R, determinado por las ecuaciones $x^2 + y^2 \geq 1$ y $0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$.



3. Hallar el volumen del sólido S, acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.



4. Evalúe la integral

$$\int_{-2}^{+2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$$

Videos de apoyo

Integrales dobles 1

<https://www.youtube.com/watch?v=QHxnat10clA>

SECUENCIA DIDACTICA

Proceso de docencia

Código: F-DO-0037

Versión: 01

Página 36 de 45

Volumen con integrales dobles
<https://www.youtube.com/watch?v=aV-srBJK5Bs>

Integrales dobles 2
<https://www.youtube.com/watch?v=CAZvIQrZhd0>

Calculo del área integrales dobles
https://www.youtube.com/watch?v=23jvsl_GA98

Integrales dobles sobre regiones polares
<https://www.youtube.com/watch?v=jrFjZdQ57Ww>

Integrales dobles en coordenadas polares
<https://www.youtube.com/watch?v=pkDI9iKHbjs>

Área de una superficie
<https://www.youtube.com/watch?v=0g3CLSqGNes>

Integrales triples introducción
<https://www.youtube.com/watch?v=5OJmHUFZP-w>

Coordenadas cilíndricas y esféricas
https://www.youtube.com/watch?v=vc_9sl2_Skl

Material complementario

- GeoGebra
- Symbolab

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 37 de 45

Tema 4. Calculo Vectorial (4 semanas)	
Evaluación	Evento evaluativo de la temática Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Explicar los conceptos fundamentales de las funciones y campos vectoriales, incluyendo la integral de línea, así como sus propiedades y aplicaciones en diversas áreas. Aplicar el conocimiento de campos vectoriales y la integral de línea para resolver problemas prácticos en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Graficar funciones y campos vectoriales para facilitar la comprensión y resolución de problemas. Encontrar la función de potencial de un campo vectorial. Calcular integrales de línea y al manipular funciones y campos vectoriales.

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

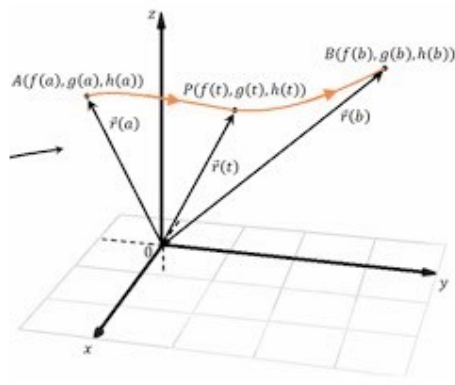
¿Cómo aplicar las funciones vectoriales en el análisis de fenómenos en diferentes contextos en ingeniería?

Funciones vectoriales

Una función con valores vectoriales, es decir, una función vectorial, es simplemente una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores.

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

Gráficamente,



Un ejemplo de esto es la función vectorial: $r(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$

Teorema. Si $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$, donde f, g , y h son funciones derivables, entonces

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$

Además,

$$\int_a^b r(t)dt = \int_a^b f(t)dt \vec{i} + \int_a^b g(t)dt \vec{j} + \int_a^b h(t)dt \vec{k}$$

Ejercicio 1

1. Calcule la derivada de la función vectorial.

$$r(t) = \langle t \sin t, t^2, t \cos 2t \rangle$$

$$r(t) = \langle \tan t, \sec t, 1/t^2 \rangle$$

$$r(t) = t\vec{i} + \vec{j} + 2\sqrt{t}\vec{k}$$

2. Evalúe la integral.

$$\int_0^2 (t\vec{i} - t^3\vec{j} + 3t^5\vec{k}) dt$$

$$\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}\vec{j} + \frac{2t}{1+t^2}\vec{k} \right) dt$$

$$\int_0^{\pi/2} (3 \sin^2 t \cos t \vec{i} + 3 \sin t \cos^2 t \vec{j} + 2 \sin t \cos t \vec{k}) dt$$

3. Calcule la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula con la función de posición dada.

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + t, t^2 - t, t^3 \rangle$$

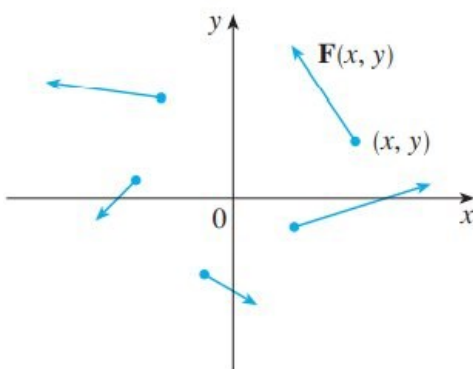
$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k})$$

Campos vectoriales

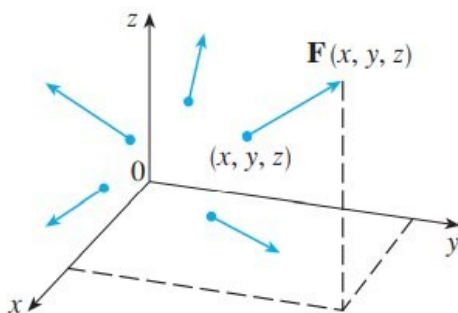
Definición: Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un **campo vectorial** sobre $\mathbb{R}^2$ es una función F que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $F(x, y)$.

$$F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$



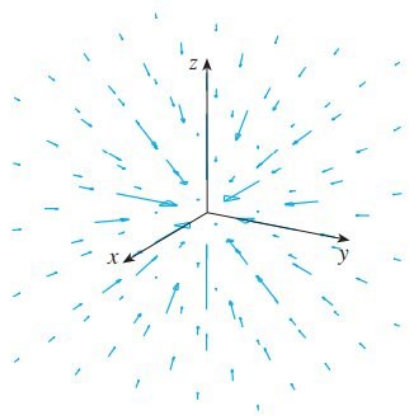
Definición. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ es una función F que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $F(x, y, z)$.

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

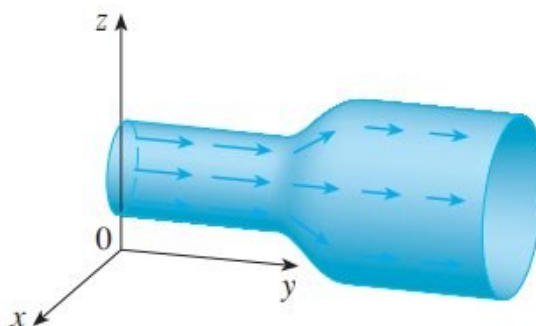


Algunos Campos vectoriales importantes

Campo gravitacional



Campo de velocidades.



Campos gradientes. Un campo vectorial F se denomina **campo vectorial conservativo** si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $F = \nabla f$. En esta situación, f recibe el nombre de función de potencial para F .

Campo gradiente en $\mathbb{R}^2$. $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$

Campo gradiente en $\mathbb{R}^3$. $\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{i} + f_y(x, y, z)\vec{j} + f_z(x, y, z)\vec{k}$

Derivadas de un campo vectorial

Un campo vectorial $F(x, y, z)$ en el espacio posee tres funciones componentes, cada una de las cuales depende de tres variables: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, y $R(x, y, z)$. Si queremos estudiar cambios del campo vectorial, notamos que debemos evaluar la variación de cada una de las funciones componentes respecto de cada una de las variables. En total tenemos nueve derivadas parciales primeras:



Resulta conveniente combinar estas funciones en dos grupos: con tres de ellas se genera una magnitud escalar llamada divergencia, mientras que con las otras seis se genera un nuevo campo vectorial llamado rotor (rotacional)

Definición. Dado un campo vectorial en el espacio $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, se define la divergencia de F como la función escalar de tres variables dada por: $\text{div}(F) = P_x + Q_y + R_z$. Siempre que las tres derivadas parciales existen.

Es decir, $\text{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Definición. El rotacional de un campo vectorial. Dado un campo vectorial en el espacio $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ se define el rotor (o rotacional) de F como el nuevo campo vectorial en el espacio dado por:

$$\text{rot}(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

En el caso de un campo vectorial $F(x, y)$ en el plano: $\text{div}(F) = P_x + Q_y$

$$\text{rot}(F) = (Q_x - P_y)\vec{k}$$

Ejercicio 2.

Determine la divergencia y el rotacional de los siguientes campos vectoriales.

1. $F(x, y, z) = \langle (x + yz), (y + xz), (z + xy) \rangle$
2. $F(x, y, z) = \langle x y^2 z^3, x^3 y z^2, x^2 y^3 z \rangle$
3. $F(x, y, z) = xye^z \vec{i} + yze^x \vec{k}$
4. $F(x, y, z) = \langle \text{Sen } yz, \text{Sen } zx, \text{Sen } xy \rangle$

Teorema. Sea $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ un campo vectorial definido en una región D del plano. Sus funciones componentes $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas en D que satisfacen: $P_y = Q_x$, para todo $(x, y) \in D$. Entonces F es un campo conservativo en D .

Ejercicio 3: Consideremos el campo vectorial

$$F(x, y) = (2x \cos y)\vec{i} - (x^2 \text{sen } y)\vec{j}.$$

- a. Determinar si F es un campo conservativo en su dominio D .

b. Si F es un campo conservativo en D , encontrar una función potencial para F

Ejercicio 4. Supongamos que $F(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ es un campo vectorial conservativo. ¿Cuál es el método para hallar una función potencial de F ?

Ejercicio 5.

1. Determinar una función potencial para los siguientes campos conservativos:

a. $F = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

b. $F(x, y, z) = (e^x \cos y + yz)\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\vec{j} + (xy + z)\vec{k}$

2. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos, y en caso afirmativo hallar una función potencial para F :

a. $F(x, y) = (y, x)$

b. $F(x, y) = (y, 1)$

c. $F(x, y) = (x - 2xy, y^2 - x^2)$

d. $F(x, y, z) = (4x - z, 3y + z, y - x)$

Integral de línea de un campo vectorial

Un concepto muy utilizado en Física es el de trabajo de una fuerza al mover un objeto de un punto a otro del espacio. Consideremos una curva suave C (en el espacio), definida por la función vectorial $r(t)$ que es continua en $[a, b]$ y tal que su derivada es diferente de cero para todo $t \in [a, b]$.

El trabajo total del campo para mover la partícula a lo largo de la curva es:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

La integral de línea de F a lo largo de C :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ejercicio 6. Calcule en cada caso, la integral de línea de F a lo largo de la curva C definida por la función vectorial indicada en cada caso:

a. $F(x, y, z) = xy\vec{i} + y\vec{j} - yz\vec{k}$, $r(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

b. $F(x, y, z) = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$, $r(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \frac{t}{6}\vec{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Integrales de línea en forma diferencial

Otra forma de escribir la integral de línea de los campos vectoriales es la forma diferencial.
Por ejemplo, si el campo vectorial es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

y denotamos por $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ al vector de posición, entonces

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

por lo que podemos escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

En el caso de que un **campo vectorial F sea conservativo** y **f es una función potencial** de dicho campo.

$$\int_C \vec{F}_{\text{conserv}} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A),$$

Ejercicio 7. Observando que el integrando es un campo gradiente, calcular las siguientes integrales

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$$

$$\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2 \cos y dx + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y \right) dy + \frac{1}{z} dz$$

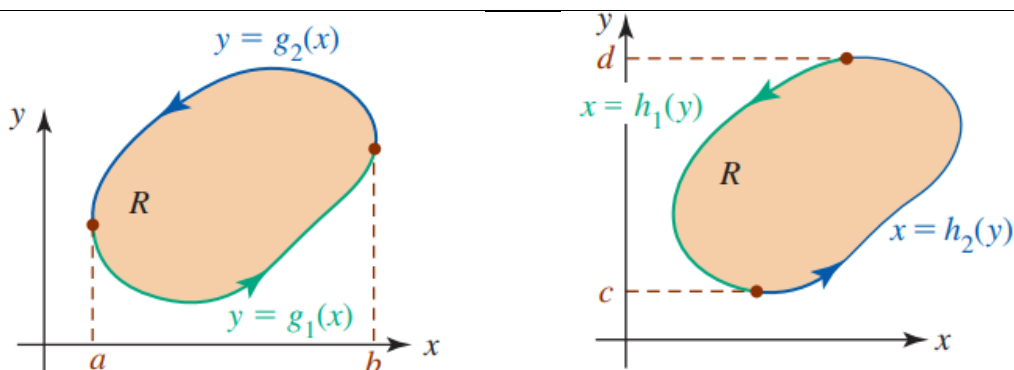
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x dx + y^2 dy - z^3 dz.$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y} dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \right) dy - \frac{y}{z^2} dz$$

Teorema de Green

Suponga que C es una curva cerrada simple suave por partes con una orientación positiva que limita una región simplemente conexa R . Si P , Q , $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas sobre R , entonces

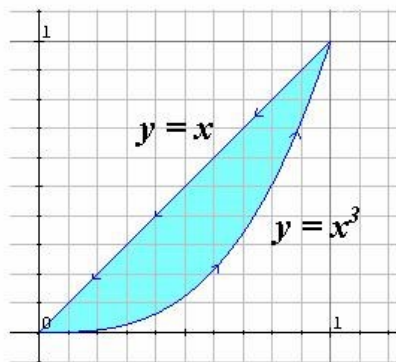
$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$



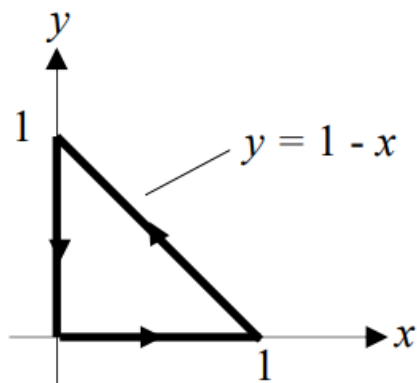
Ejercicio 8

1. Usar el Teorema de Green para calcular la integral de línea, donde C es la gráfica ilustrada.

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$



2. Evaluar $\int_C x^4 dx + xy dy$ donde C es la curva triangular que une los puntos $(0;0)$, $(0;1)$ y $(1;0)$, orientada positivamente.



Videos de apoyo

Funciones vectoriales

<https://www.youtube.com/watch?v=krQvjM21F-M>

Calculo con funciones vectoriales

<https://www.youtube.com/watch?v=bzs6jl28xBI>

Introducción a la integral de línea

<https://www.youtube.com/watch?v=WMAxBWNS4Gc>

Material complementario

- GeoGebra
- Symbolab