

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 1 de 43

"Las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos"

Información general de la asignatura Nombre: Cálculo II Programa académico: Ingeniería Electrónica - Ingeniería Industrial- Ingeniería Informática	
Prerrequisitos para el aprendizaje Académicos: conocimientos sobre el concepto y cálculo de la derivada; la integral de una función de valor real. Personales: disposición y deseos de aprender, ser responsable y contar con tiempo suficiente para el desarrollo de las diferentes actividades propuestas.	Requerimientos técnicos: Correo institucional
Referencias Texto 1: Stewart, J. (2018) Calculo. Trascendentes tempranas. (8 ed.) México: Cengage. Texto 2: Smith, R. Milton, R. & Rafhi, Z. (2019) Calculo: trascendentes tempranas. (5 ed.) México: McGraw - Hill Education.	Contenido de la asignatura por temáticas Tema 1. Antiderivadas e Integral definida (4 semanas) Tema 2. Técnicas de integración (4 semanas) Tema 3. Aplicaciones de la integral definida (4 semanas) Tema 4. Sucesiones y series (4 semanas)
Actividades	Por parte del docente: presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas para la asignatura. Por parte del estudiante: Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo y demás sugeridas por el docente Realización del proyecto de curso
Evaluación de la asignatura	Examen parcial (20%) - semana 8 Examen Final (20%) - Semana 17 Seguimiento (60%) - 4 eventos evaluativos del 10% cada uno, un proyecto de curso y su respectiva exposición (10%), coevaluación de la exposición (5%) y autoevaluación (5%)

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 2 de 43

Ruta de aprendizaje

Tema 1. Antiderivadas e Integral definida (4 semanas)	
Evaluación	Evento evaluativo de la temática Semana 3 Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Relacionar la derivada y la antiderivada de una función de valor real. Identificar que funciones tienen antiderivada directa, desde los conocimientos básicos sobre la derivada de una función. Identificar cuando una función requiere cambio de variable para el calculo de su antiderivada más general. Utilizar los conceptos relacionados con el cálculo de la antiderivada de una función en la solución de problemas en diferentes contextos. Reconocer la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo en la determinación de integrales definidas.
Criterios de desempeño	Calcular eficientemente la antiderivada de una función de valor real. Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo, en la determinación del valor de una integral definida. Resuelve problemas que involucran en su solución el cálculo de la antiderivada o la integral definida de una función de valor real.

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

¿Cómo relacionar la derivada y la antiderivada de una función de valor real de forma tal, que permita la determinación de forma correcta de la antiderivada más general de algunas funciones?

Antiderivada de una función

La antiderivada, también conocida como integral indefinida, es una herramienta fundamental en el cálculo que nos permite encontrar una función cuya derivada es igual a una función dada. En otras palabras, nos permite retroceder en el proceso de diferenciación para encontrar la función original a partir de su

derivada. Esto se logra mediante la adición de una constante arbitraria, lo que da lugar a una familia de funciones que comparten la misma derivada. La antiderivada juega un papel crucial en diversas áreas de las matemáticas y la física, permitiendo resolver problemas de optimización, modelado de fenómenos naturales y análisis de comportamientos de sistemas dinámicos.

Definición

Una función F recibe el nombre de antiderivada de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I .

Teorema

Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I , entonces la antiderivada más general de f sobre I es $F(x) + C$ donde C es una constante arbitraria.

La integral indefinida

El proceso para determinar todas las antiderivadas de una función se llama antidiferenciación o integración. Utilice el símbolo $\int$, llamado signo integral, para indicar que la operación de integración se lleva a cabo en alguna función f . Por tanto, $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Indica que la integral indefinida de f es la familia de funciones dadas por $F(x) + C$, donde $F'(x) = f(x)$. La función f al ser integrada se le da el nombre de integrando, y la constante C se llama constante de integración. La expresión dx seguida del integrando $f(x)$ recuerda que la operación se lleva a cabo con respecto a x .

Para Integrar funciones tenga presente:

Regla Básica	Ejemplo
$\int k dx = k \cdot x + C$ Donde k es una constante.	$\int 5 dx = 5x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)} + C$ Si $n \neq -1$	$\int x^{-10} dx = \frac{x^{-9}}{-9} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	
Si $n = -1$ $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + C$	
$\int \text{Sen } x dx = -\text{Cos } x + C$	
$\int \text{Cos } x dx = \text{Sen } x + C$	

$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$	
$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$	
$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$	
$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + C$	
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$	
$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ Donde k es una constante.	$\int -4 x^{1/2} \, dx = -4 \int x^{1/2} \, dx$ $= -4 \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} \right) + C$ $= -\frac{8}{3} x^{3/2} + C$
$\int [f(x) \pm g(x)] dx$ $= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$	$\int \left(3e^x - \frac{1}{x} \right) dx$ $= 3 \int e^x \, dx$ $- \int \frac{1}{x} \, dx = 3e^x - \ln x + C$
Tenga presente además	
$\frac{1}{x^r} = x^{-r}, \text{ para todo } r \in \mathbb{R}, r \neq 0$	$\sqrt[r]{x^p} = x^{p/r}$

Ejercicio 1. Determinar las siguientes integrales.

- $\int \left(4x^3 - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx$
- $\int \left(6x^3 - \frac{3}{x^2} - x \right) dx$
- $\int (\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} - x) dx$
- $\int \left(\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx$
- $\int (x + x^{-1} - e^x) dx$
- $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dx$
- $\int \frac{1}{x^2} (x^4 - 2x^2 + 1) dx$
- $\int \left(\frac{x^4-1}{x^2} \right) dx$
- $\int \sqrt{x} (x^2 + x - 1) dx$

$$10. \int \left(\frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^2} \right) dx$$

$$11. \int (2x + 1)(x - 2) dx$$

$$12. \int \left[\frac{(1 - x^2 + x^4)}{x^2} \right] dx$$

$$13. \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$14. \int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 2e^x \right) dx$$

$$15. \int \frac{dx}{(x+1)^{-2}}$$

$$16. \int (2 + x + 2x^2 + e^x) dx$$

$$17. \int (e^x + x^e) dx$$

$$18. \int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$19. \int (x + 1)^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$20. \int \left(\frac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{x^2} \right) dx$$

$$21. \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x^2} dx$$

$$22. \int \frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Cos} x} dx$$

$$23. \int (5 \text{ Sen } x - 10 \text{ Cos } x) dx$$

$$24. \int 3 \text{ Cos } x \text{ Sec } x dx$$

Antiderivada de funciones compuestas - Integración por Sustitución

Se aplica si $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$.

Se hace $u = g(x)$ y se deriva $du = g'(x) dx$. Se despeja $\frac{du}{g'(x)} = dx$

$u = g(x)$ y $\frac{du}{g'(x)} = dx$ se lleva a $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$ y se realiza la integral $\int f[u] \cdot du$ en esta solución se reemplaza u por $g(x)$ para obtener una solución en función de x

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales.

$$1. \int \left(x e^{x^2} - \frac{x}{x^2 + 2} \right) dx$$

$$2. \int \left(x e^{-x^2} - \frac{e^x}{e^x + 3} \right) dx$$

$$3. \int \left(\frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - x} \right) dx$$

$$4. \int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \right) dx$$

$$5. \int [x(x-1)^5] dx$$

$$6. \int \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$$

$$7. \int \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right) dx$$

$$8. \int [x^2(1-x)^6] dx$$

$$9. \int \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) dx$$

$$10. \int \left[x^3 (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] dx$$

$$11. \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx$$

$$12. \int \left(\frac{1}{x(1 + \ln x)} \right) dx$$

$$13. \int \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

$$14. \int \left(\frac{1}{x(1 + \ln x)^4} \right) dx$$

$$15. \int \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx$$

16. $\int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+7}} \right) dx$	17. $\int \left(\frac{x^3}{x-1} \right) dx$	18. $\int (x\sqrt{x+1}) dx$
19. $\int \left(\frac{1}{(x+3) \cdot \ln(x+3)} \right) dx$	20. $\int [x^2\sqrt{x-3}] dx$	21. $\int (x^2 e^{x^3}) dx$
22. $\int \left(4e^{2x} - \frac{1}{x} \right) dx$	23. $\int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx$	24. $\int \left(\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1} \right) dx$
25. $\int x \cos(3x^2 + 4) dx$	26. $\int \sin(3x - 7) dx$	27. $\int 3 \sec^2(3x - 10) dx$
28. $\int \tan x dx$	29. $\int \cot x dx$	30. $\int \cos x (4 - \sin x)^7 dx$

Integral Definida

La integral definida es una herramienta importante en matemáticas, que nos permite calcular el área bajo una curva en un intervalo específico. A diferencia de la integral indefinida, que encuentra una familia de funciones cuya derivada es igual a una función dada, la integral definida nos proporciona un valor numérico que representa el área exacta entre la curva y el eje x en un intervalo dado. Este concepto tiene aplicaciones en una amplia gama de campos, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la biología, donde se utiliza para resolver problemas de optimización, calcular cantidades acumuladas y analizar fenómenos que varían en el tiempo o en el espacio.

Matemáticamente, la **integral definida** se interpreta como la suma de infinitos elementos de área, cada uno infinitesimalmente pequeño, y se utiliza para calcular cantidades acumuladas, como área, volumen y trabajo.

Notación

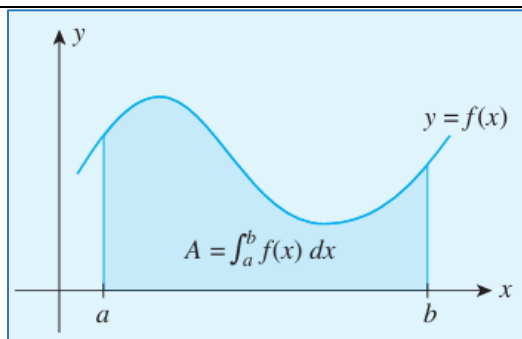
La integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota así:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Donde los números reales a y b , se conocen como límites de integración, la función $f(x)$ se llama integrando y dx representa la variable de integración.

Interpretación geométrica de la integral definida.

Si f es no negativa y continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx$ es igual al área de la región bajo la curva de f en $[a, b]$.



Propiedades de la integral definida

Propiedades de la integral definida

Sean f y g funciones integrables; entonces,

$$1. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$3. \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (c, \text{ una constante})$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

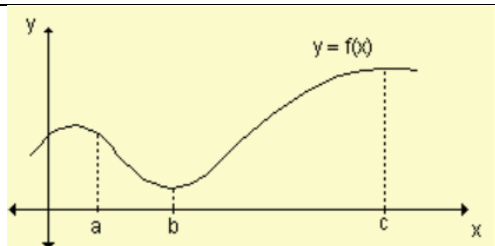
Ejercicio 3

I. A continuación, se presentan varias afirmaciones, analice si cada una es falsa o verdadera indicando con F si es falsa o con V si es verdadera:

1. Las integrales definidas surgen del concepto de antiderivada ()
2. Dada $\int_a^b q(x) \cdot f(x) dx = (\int_a^0 q(x)) (\int_0^b f(x) dx)$ ()
3. Se cumple que $\int_2^4 x dx = 2 \int_1^2 x dx$ ()
4. Dada $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ ()

II. Dadas las integrales: $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$ y $\int_{-5}^2 f(x) dx = 7$
 Entonces el valor de $\int_{-5}^{-1} f(x) dx$ es _____

III. En la función definida en el siguiente gráfico



Se sabe que: $\int_a^c f(x)dx = 6$ y $\int_b^c f(x)dx = 4$

El valor de $\int_a^b f(x)dx$ es _____

Teorema fundamental del cálculo- cómo evaluar integrales definidas

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en el intervalo, entonces $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales definidas

1. $\int_0^{e-1} \left(\frac{1}{x+1} \right) dx$

2. $\int_4^5 \left(\frac{2}{(x-3)^3} \right) dx$

3. $\int_0^2 x(x^2 - 1)^3 dx$

4. $\int_0^2 (x^2 e^{x^3}) dx$

5. $\int_0^6 (\sqrt{2x+4}) dx$

6. $\int_{\frac{1}{3}}^2 (\sqrt{10-3x}) dx$

7. $\int_{-1}^1 (x\sqrt{x^2+3}) dx$

8. $\int_0^1 (x^2 \sqrt[3]{7x^3+1}) dx$

9. $\int_0^1 (e^x - e^{-2x}) dx$

10. $\int_0^{\sqrt{7}} \left(2x - \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{5}{3}}} \right) dx$

11. $\int_a^b (m + nx) dx$

12. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \right) dx$

13. $\int_1^e (x^{-1} - x^{-3} + x^{-2}) dx$

14. $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x} dx$

15. $\int_3^4 \frac{e^{\ln x}}{x} dx$

16. $\int_1^2 (2x+4) \cdot (x^2+4x-8)^3 dx$

17. $\int_0^1 x(2x^3-1)^4 dx$

18. $\int_1^3 (x\sqrt{3x^2-2}) dx$

19. $\int_0^1 (e^{2x} + x^2 + 1) dx$

20. $\int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}} dx$

21. $\int_{-1}^1 xe^{x^2+1} dx$

$$22. \int_1^2 \left(\frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 1} \right) dx$$

$$23. \int_0^1 \left(\frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx$$

$$24. \int_1^2 \left(2e^{-4x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$25. \int_0^4 \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$26. \int_1^2 \left(\frac{\ln x}{x} \right) du$$

$$27. \int_0^2 x e^{x^2} dx$$

Teorema fundamental del cálculo - cómo construir antiderivadas

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea x un punto en (a, b) , entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Ejercicio de profundización 1

Use la integral definida para resolver los siguientes problemas:

- Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal con velocidad $v(t) = t^2 - 2t - 8\frac{m}{s}$, donde $1 \leq t \leq 6$ [s]. Calcule.
 - El desplazamiento y
 - La distancia recorrida por la partícula durante el intervalo de tiempo dado.
- Del fondo de un tanque sale agua a razón de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, para $0 \leq t \leq 50$. Calcule la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.
- La densidad lineal de una varilla de 4 m de longitud está dada por $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ kg/m, donde x se mide en m desde un extremo de la varilla. Calcule la masa total de esta.
- Si $w'(t)$ es la tasa de crecimiento de un niño por año. ¿Qué representa $\int_5^{10} w'(t) dt$?
- El agua se derrama del fondo de un tanque a razón de $2 + 5t$ litros por hora, donde t es el número de horas después de las 7a.m. ¿Cuánta agua se ha perdido entre las 9 y las 11 de la mañana?

Ejercicio de repaso tema 1

Parte 1

$$1. \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1) dx$$

$$2. \int_{-3}^5 (y^3 - 4y) dy$$

$$3. \int_0^1 \frac{z}{(z^2 + 1)^3} dz$$

$$4. \int_1^4 \sqrt{x}(2 + x) dx$$

$$5. \int_1^{10} \sqrt{5x - 1} dx$$

$$6. \int_{-2}^0 3w\sqrt{4 - w^2} dw$$

$$7. \int_{-1}^3 \frac{dy}{(y + 2)^3}$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$$

$$9. \int_0^1 \frac{(y^2 + 2y) dy}{\sqrt[3]{y^3 + 3y^2 + 4}}$$

$$10. \int_4^5 x^2 \sqrt{x - 4} dx$$

$$11. \int_{-2}^5 |x - 3| dx$$

$$12. \int_{-1}^1 \sqrt{|x| - x} dx$$

13. $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1} dx$

14. $\int_{-3}^2 \frac{3x^3 - 24x^2 + 48x + 5}{x^2 - 8x + 16} dx$

Parte 2

1. $\int (3x+4) dx$

2. $\int (\cos x - 5 \sin x - 7) dx$

3. $\int \frac{-8x^4 + 3x^2 + 9}{3x^3} dx$

4. $\int \cot^2 x (1 + \tan^2 x) dx$

5. $\int \sqrt{x} (x-3) dx$

6. $\int 7 - \frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^2} dx$

7. $\int \frac{\sec x}{\tan x + \cot x} dx$

8. $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$

9. $\int \frac{\sec x}{\cos^2 x} dx$

10. $\int x^{-2} dx$

Parte 3

1. $\int \sqrt{1-4y} dy$

2. $\int x^2 (x^3 - 1)^{10} dx$

3. $\int (x^2 - 4x + 4)^{4/3} dx$

4. $\int x\sqrt{x+2} dx$

5. $\int \sqrt{3-2xx^2} dx$

6. $\int \cos 4\theta d\theta$

7. $\int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt$

8. $\int \cos x (2 + \sin x)^5 dx$

9. $\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}} \frac{dx}{x^2}$

10. $\int 2 \sin x \sqrt[3]{1 + \cos x} dx$

11. $\int \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$

12. $\int \frac{\sec^2 3\sqrt{t} dt}{\sqrt{t}}$

13. $\int \frac{(y+3)dy}{(3-y)^{2/3}}$

14. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

15. $\int \tan x dx$

16. $\int e^{kx} dx,$

k es una constante arbitraria

17. $\int \sec x dx$

18. $\int \cot x dx$

19. $\int \csc x dx$

20. $\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy$

21. $\int \frac{2rdr}{(1-r)^{2/3}}$

22. $\int \frac{(x^2+2x)dx}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}$

23. $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}} dy$

24. $\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{3/2} \left(\frac{t^2-1}{t^2}\right) dt$

25. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

26. $\int \frac{s}{2s+3} ds$

27. $y = \int x(x^2+9)^{1/2} dx$

28. $\int (x^2+2)/(x^3+6x-1) dx$

29. $\int \left[(3x^2-6)/\sqrt{x^3-6x}\right] dx$

30. $\int x^2 \sin(x^3+4) dx$

Parte 4

(Ejercicios tomados del texto Stewart, J. (2018) Calculo. Trascendentes tempranas. (8 ed.) México: Cengage.)

11. $\int_1^2 (8x^3 + 3x^2) dx$ 13. $\int_0^1 (1 - x^3) dx$ 15. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u} du$ 17. $\int_0^1 y(y^2 + 1)^5 dy$ 19. $\int_{-3}^3 \frac{dr}{(r - 1)^4}$ 21. $\int_0^1 v^2 \cos(v^3) dv$ 23. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t} dt$ 25. $\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 dx$	12. $\int_0^T (x^4 - 8x + 7) dx$ 14. $\int_0^1 (1 - x)^9 dx$ 16. $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2 du$ 18. $\int_0^2 y^2 \sqrt{1 + y^3} dy$ 20. $\int_0^1 \sin(3\pi t) dt$ 22. $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 + x^2} dx$ 24. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$ 26. $\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4} dx$	27. $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx$ 29. $\int \sin \pi t \cos \pi t dt$ 31. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ 33. $\int \tan x \ln(\cos x) dx$ 35. $\int \frac{x^3}{1 + x^4} dx$ 37. $\int \frac{\sec \theta \tan \theta}{1 + \sec \theta} d\theta$ 39. $\int_0^3 x^2 - 4 dx$	28. $\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x} dx$ 30. $\int \sin x \cos(\cos x) dx$ 32. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ 34. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ 36. $\int \sinh(1 + 4x) dx$ 38. $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3 \sec^2 t dt$ 40. $\int_0^4 \sqrt{x} - 1 dx$
Videos de apoyo	La antiderivada o integral de una función https://www.youtube.com/watch?v=b_ve-mmsAbQ Reglas para integrar una función https://www.youtube.com/watch?v=On9LaPHyvbE Integración por sustitución Introducción https://www.youtube.com/watch?v=UZyG4jCBMgU Integrales definidas Introducción https://www.youtube.com/watch?v=TocqVkBzDrA Propiedades de la integral definida https://www.youtube.com/watch?v=7_V4XqWFmPg Integral definida y sus propiedades básicas https://www.youtube.com/watch?v=L4K4JXMXJbI		
Material complementario	- GeoGebra - Symbolab		

Tema 2. Técnicas de integración (4 semanas)

Evaluación	Evento evaluativo de la temática Semana 7 Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Reconocer las técnicas de integración básicas. Identificar la técnica de integración apropiada a usar según la función a integrar.
Criterios de desempeño	Utiliza eficientemente las técnicas de integración básicas

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

¿Cuándo es necesario usar una técnica de integración para el cálculo de la integral de una función y que método usar en cada caso?

Técnicas de integración

Integración por partes. Esta técnica busca transformar una integral en otra más sencilla, aplicando a derivada de un producto:

Regla de integración por partes: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$

En la práctica se usan diferenciales así:

$$\begin{array}{ll} u = f(x) & dv = g'(x) dx \\ du = f'(x) dx & v = g(x) \end{array}$$

Y la formula a aplicar seria:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Cuando se presentan varias opciones en la elección de u y dv , hay que aplicar dos criterios:

- (a) v debe ser fácil de calcular a partir de dv y
- (b) la integral $\int v du$ Debe ser, en cierto sentido, más fácil que la integral original.

En caso de que la integral sea definida:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Ejercicio 1

Use el método de integración por partes para determinar las siguientes integrales

$$1. \int 2xe^{-x} dx$$

$$2. \int x \cos(3x) dx$$

$$3. \int x \sec^2 x dx$$

$$4. \int x^3 \ln x dx$$

$$5. \int (\ln x)^2 dx$$

$$6. \int \cos(\ln x) dx$$

$$7. \int e^x \cos x dx$$

$$8. \int \cos 3x \sin 2x dx$$

$$9. \int e^{\sqrt{x}} dx$$

Ejercicio de profundización 1

Parte 1. Existe una forma rápida de realizar algunas integrales por partes en el caso en que la técnica deba aplicarse varias veces, esta forma de realizar la integral por partes resumida se conoce como integral por tabulación (o por tabla) investigar en qué casos se puede usar y cómo funciona y usarla para resolver las siguientes integrales:

A. $\int x^4 \cos x dx$

B. $\int (3x^2 - 5x + 4)e^{5x-1} dx$

Parte 2. Calcule usando integración por partes $\int x^r \ln x dx$ para $r \in \mathbb{R}$. Use el resultado encontrado para escribir la solución de las integrales:

A. $\int x^3 \ln x dx$

B. $\int x^{2/3} \ln x dx$

Integración de potencias trigonométricas

Caso 1. Integrales de la forma $\int \cos^n x \sin^m x dx$

A. Si n es impar hacemos: $\int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x dx$, usamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Obteniendo así, una integral de potencias del $\sin x$ por su derivada que es el $\cos x$, la cual se puede integrar por sustitución haciendo $u = \sin x$ y $du = \cos x dx$

B. Si m es impar hacemos: $\int \cos^n x \sin^{m-1} x \sin x dx$, usamos la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Obteniendo así, una integral de potencias del $\cos x$, la cual se puede integrar por sustitución haciendo $u = \cos x$ y $du = -\sin x dx$

C. Si n y m son pares se usan las identidades $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Caso 2. Integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x dx$

A. Si n es par hacemos $\int \tan^m x \sec^{n-2} x \sec^2 x dx$, usamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Obteniendo así, una integral de potencias de la $\tan x$ por su derivada que es la $\sec^2 x$, la cual se puede integrar por sustitución haciendo $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$

B. Si m es impar hacemos $\int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x \sec x \tan x dx$, usamos la identidad $\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$. Obteniendo así, una integral de potencias de la $\sec x$ por su derivada que es $\sec x \tan x$, la cual se puede integrar por sustitución haciendo $u = \sec x$ y $du = \sec x \tan x dx$

Ejercicio 2. Efectuar las siguientes integrales

$$\begin{array}{lll} 1. \int \sqrt[3]{\cos x} \sin^3 x dx & 2. \int \sin^7 5x \cos^3 5x dx & 3. \int \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx \\ 4. \int \tan^3(2-x) dx & 5. \int \sec^4 x dx & 6. \int \sec^4 x \sqrt{\tan x} dx \end{array}$$

Integración por sustitución trigonométrica

Esta técnica de integración se utiliza cuando el integrando contiene una potencia de alguna de las siguientes expresiones: $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ o $\sqrt{u^2 + a^2}$, donde a es una constante real y u es una función no constante de x .

La siguiente tabla resume el procedimiento a seguir en cada caso.

Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ hacemos $u = a \sin \theta$ de donde $du = a \cos \theta d\theta$ Y la expresión $\sqrt{a^2 - u^2}$ se transforma en: $\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} = a \cos \theta \end{aligned}$	Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + u^2}$ hacemos $u = a \tan \theta$ de donde $du = a \sec^2 \theta d\theta$ Y la expresión $\sqrt{a^2 + u^2}$ se transforma en: $\begin{aligned} \sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta \end{aligned}$	Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{u^2 - a^2}$ hacemos $u = a \sec \theta$ de donde $du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ Y la expresión $\sqrt{u^2 - a^2}$ se transforma en: $\begin{aligned} \sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta \end{aligned}$
---	---	---

Nota importante: Tener presente que el método utiliza una nueva variable θ , por lo cual es necesario para entregar el resultado de la integral volver a la variable original usando las sustituciones realizadas o las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo según la sustitución planteada.

Ejercicio 3. Efectuar

$$1. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx$$

$$2. \int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$3. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$$

Integración de funciones Racionales - Fracciones parciales

Son las integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x .

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$ se efectúa la división, $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

quedando reducida la integral inicial a la de un polinomio más una integral racional donde el grado del numerador, $R(x)$, es menor que el grado del denominador $Q(x)$. Sólo consideraremos, entonces, integrales de este último tipo.

Para resolver esta, descompondremos $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples lo que equivaldrá a sustituir la integral inicial por una suma de integrales más elementales.

Ejercicio 4. Efectuar

$$1. \int \frac{x^2}{x^2 + x - 6} dx$$

$$2. \int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx$$

$$3. \int \frac{4x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$$

$$4. \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$5. \int \frac{5x^2 - 11x + 5}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$$

$$6. \int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} dx$$

Ejercicio de Repaso tema 2. (Ejercicios tomados del texto Stewart, J. (2018) Calculo. Trascendentes tempranas. (8 ed.) México: Cengage.)

Pag 476

Técnicas de Integración – Integración por partes

1–2 Evalúe las integrales siguientes utilizando integración por partes con las elecciones de u y dv indicadas.

1. $\int x e^{2x} dx$; $u = x$, $dv = e^{2x} dx$

2. $\int \sqrt{x} \ln x dx$; $u = \ln x$, $dv = \sqrt{x} dx$

3–36 Evalúe la integral.

3. $\int x \cos 5x dx$

4. $\int y e^{0.2y} dy$

5. $\int r e^{r/2} dr$

6. $\int t \sin 2t dt$

7. $\int (x^2 + 2x) \cos x dx$

8. $\int t \sec^2 2t dt$

9. $\int \cos^{-1} x dx$

10. $\int \ln \sqrt{x} dx$

11. $\int t^4 \ln t dt$

12. $\int \tan^{-1} 2y dy$

13. $\int t \csc^2 t dt$

15. $\int \ln \sqrt[3]{x} dx$

17. $\int \arctan 4t dt$

19. $\int z^3 e^z dz$

21. $\int \frac{x e^{2x}}{(1 + 2x)^2} dx$

23. $\int_0^{1/2} x \cos \pi x dx$

25. $\int_0^2 y \sinh y dy$

27. $\int_1^5 \frac{\ln R}{R^2} dR$

29. $\int_0^\pi x \sin x \cos x dx$

14. $\int x \cosh ax dx$

16. $\int \frac{z}{10^z} dz$

18. $\int s 2^s ds$

20. $\int x \tan^2 x dx$

22. $\int (\arcsen x)^2 dx$

24. $\int_0^1 (x^2 + 1) e^{-x} dx$

26. $\int_1^2 w \ln w dw$

28. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}} dy$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x) dx$

Página 485 – Potencias trigonométricas

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

2. $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^5 \theta d\theta$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

5. $\int \sin^5(2t) \cos^2(2t) dt$

6. $\int t \cos^5(t^2) dt$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$

8. $\int \frac{\sin^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

9. $\int_0^\pi \cos^4(2t) dt$

10. $\int x \sin^3 x dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x dx$

12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \sin \theta)^2 d\theta$

13. $\int \sqrt{\cos \theta} \sin^3 \theta d\theta$

14. $\int \frac{\sin^2(1/t)}{t^2} dt$

15. $\int \cot x \cos^2 x dx$

16. $\int \tan^2 x \cos^3 x dx$

17. $\int \sin^2 x \sin 2x dx$

18. $\int \sin x \cos(\frac{1}{2}x) dx$

19. $\int t \sin^2 t dt$

20. $\int \cos \theta \cos^5(\sin \theta) d\theta$

21. $\int \tan x \sec^3 x dx$

22. $\int \tan^2 \theta \sec^4 \theta d\theta$

23. $\int \tan^2 x dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$

25. $\int \tan^4 x \sec^6 x dx$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^6 \theta \tan^6 \theta d\theta$

27. $\int \tan^3 x \sec x dx$

28. $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$

29. $\int \tan^3 x \sec^6 x dx$

30. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t dt$

Pag 491 – Sustitución Trigonométrica

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$		17. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}} dx$	18. $\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$
5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$	6. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}} dx$	19. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$	20. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$
7. $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0$	8. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-16}}$	21. $\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}} dx$	22. $\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$
9. $\int_2^3 \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$	10. $\int_0^{2/3} \sqrt{4-9x^2} dx$	23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$	24. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$
11. $\int_0^{1/2} x \sqrt{1-4x^2} dx$	12. $\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{4+t^2}}$	25. $\int x^2 \sqrt{3+2x-x^2} dx$	26. $\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}} dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$	14. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$	27. $\int \sqrt{5+4x-x^2} dx$	28. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} dx$
15. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$	16. $\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5 \sqrt{9x^2-1}}$	29. $\int x \sqrt{1-x^4} dx$	30. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\sin^2 t}} dt$

Pag 501 – Integración de funciones racionales

7. $\int \frac{x}{x-6} dx$	8. $\int \frac{r^2}{r+4} dr$
9. $\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx$	10. $\int \frac{1}{(t+4)(t-1)} dt$
11. $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx$	12. $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$
13. $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2} dx$	14. $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6} dx$
15. $\int_{-1}^0 \frac{x^3-4x+1}{x^2-3x+2} dx$	16. $\int_1^2 \frac{x^3+4x^2+x-1}{x^3+x^2} dx$
17. $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} dy$	18. $\int_1^2 \frac{3x^2+6x+2}{x^2+3x+2} dx$
19. $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)} dx$	20. $\int_2^3 \frac{x(3-5x)}{(3x-1)(x-1)^2} dx$
21. $\int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$	22. $\int \frac{x^4+9x^2+x+2}{x^2+9} dx$
23. $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx$	24. $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x} dx$

Pag 507 – Repaso técnicas

1–82 Evalúe la integral.

1. $\int \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$

2. $\int_0^1 (3x + 1)^{\sqrt{2}} dx$

11. $\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx$

12. $\int \frac{2x - 3}{x^3 + 3x} dx$

3. $\int_1^4 \sqrt{y} \ln y dy$

4. $\int \tan^3 \theta d\theta$

13. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$

14. $\int \ln(1 + x^2) dx$

5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t - 3)^2} dt$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}} dx$

15. $\int x \sec x \tan x dx$

16. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1 + y^2} dy$

8. $\int_0^4 \frac{x - 1}{x^2 - 4x - 5} dx$

17. $\int_0^{\pi} t \cos^2 t dt$

18. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

9. $\int_2^4 \frac{x + 2}{x^2 + 3x - 4} dx$

10. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^3} dx$

19. $\int e^{x+e^x} dx$

20. $\int e^2 dx$

21. $\int \arctan \sqrt{x} dx$

22. $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + (\ln x)^2}} dx$

23. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8} dx$

24. $\int (1 + \tan x)^2 \sec x dx$

59. $\int \frac{dx}{x^4 - 16}$

60. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4x^2 - 1}}$

25. $\int_0^1 \frac{1 + 12t}{1 + 3t} dt$

26. $\int_0^1 \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

61. $\int \frac{d\theta}{1 + \cos \theta}$

62. $\int \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta}$

27. $\int \frac{dx}{1 + e^x}$

28. $\int \sin \sqrt{at} dt$

63. $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$

64. $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} dx$

29. $\int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) dx$

30. $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

65. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx$

66. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$

Videos de apoyo

Integración por partes: ¿De dónde sale la fórmula?

https://www.youtube.com/watch?v=ViQVu8ogSvA&list=PL9SnRnlzoyXOb_uh-4ixsls13cs8xdXoj

Integración por partes, logaritmo natural (Ejemplo resuelto)

https://www.youtube.com/watch?v=t1yGn2PodMc&list=PL9SnRnlzoyXOb_uh-4ixsls13cs8xdXoj&index=2

Integral por método Tabular (Truco para integración por partes, ejemplo resuelto)

https://www.youtube.com/watch?v=RB1toH4UgtM&list=PL9SnRnlzoyXOb_uh-4ixsls13cs8xdXoj&index=32

Integrales trigonométricas con secante y tangente explicadas por CASOS

<https://www.youtube.com/watch?v=Z1EELvQER3o>

Integral con sustitución trigonométrica de tipo seno con raíz cuadrada. EJERCICIO RESUELTO.

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 19 de 43

	https://www.youtube.com/watch?v=8W0eyd5Vhzg&list=PL9SnRnlzoyX0xKKJEF2C3KQQnL3zT0ne0&index=2 Integración por Fracciones Parciales Introducción https://www.youtube.com/watch?v=6pFmUh41jsQ
Material complementario	• GeoGebra • Symbolab

Tema 3. Aplicaciones de la Integral Definida (4 semanas)

Evaluación	Evento evaluativo de la temática semana 11 Valor 10% Exposición de productos de curso semana 13 (15% entre heteroevaluación y coevaluación) Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Identificar las aplicaciones geométricas de la integral definida Reconocer las aplicaciones de la derivada en diferentes contextos
Criterios de desempeño	Calcular área entre curvas en el plano y volúmenes de un sólido de revolución como aplicaciones de la integral definida. Resolver problemas en diferentes contextos que implican el cálculo de integrales definidas (Producto de curso)

Guía de trabajo

Pregunta Orientadora

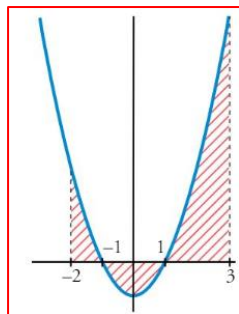
¿Cómo se puede aplicar la integral definida para resolver problemas en diferentes contextos?

Área entre curvas

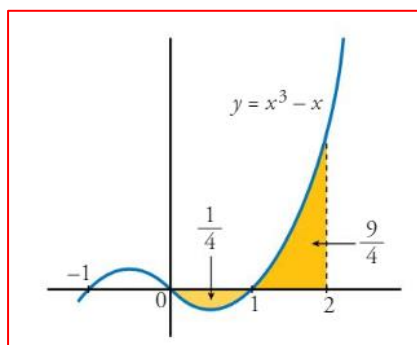
Retomemos el problema del cálculo del área de una región plana

Ejercicio 1.

1. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = x^2 - 1$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

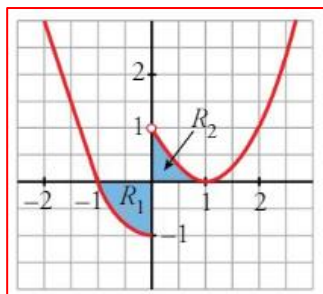


2. Hallar el área encerrada entre la curva $f(x) = x^3 - x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

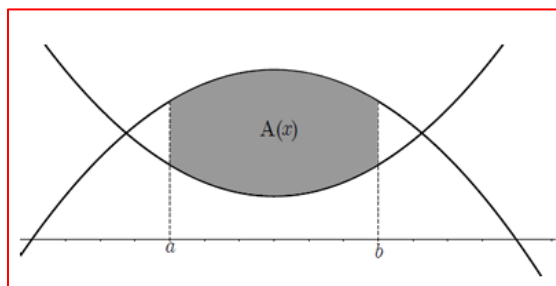


3. Hallar el área de la región limitado por los ejes de coordenadas y la siguiente función definida a trozos:

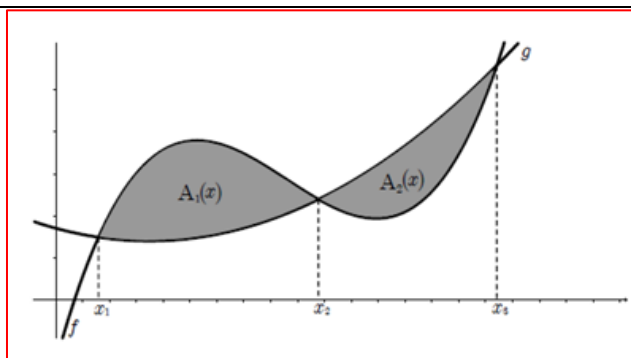
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Supongamos que A es la región en el plano limitada por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, como se muestra en la figura:



Bajo el supuesto de que $f(x) > g(x)$, definimos $h(x) = f(x) - g(x)$ y en este caso $\text{Area} = A(x) = \int_a^b h(x) dx$. Si no hay restricción en cuanto a intervalo a considerar. Y se desea determinar el área de la región limitada por dos funciones. Es posible que éstas se corten en varios puntos y por tanto que cambien de posición relativa.

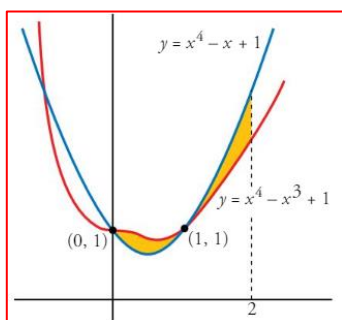


En estos casos el área se calcula, así:

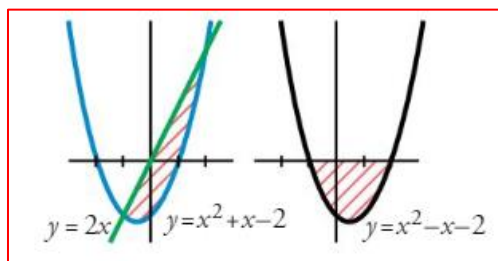
$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x)) dx$$

Ejercicio 2.

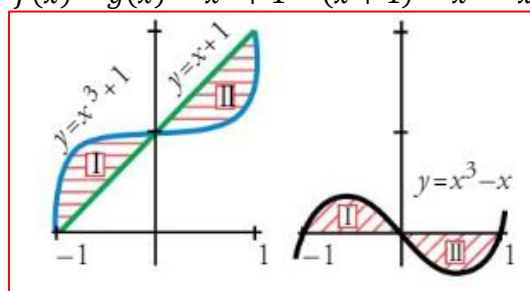
4. Calcular el área limitada por el eje X, las rectas de abscisas $x = 0$ y $x = 2$, y las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - x + 1$ y $g(x) = x^4 - x^3 + 1$.



5. Calcular el área encerrada por las funciones $f(x) = x^2 + x - 2$ y $g(x) = 2x$.



6. Hallar el área limitada por las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = x + 1$:
 $f(x) - g(x) = x^3 + 1 - (x + 1) = x^3 - x$



Ejercicio de Profundización 1

Determine el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

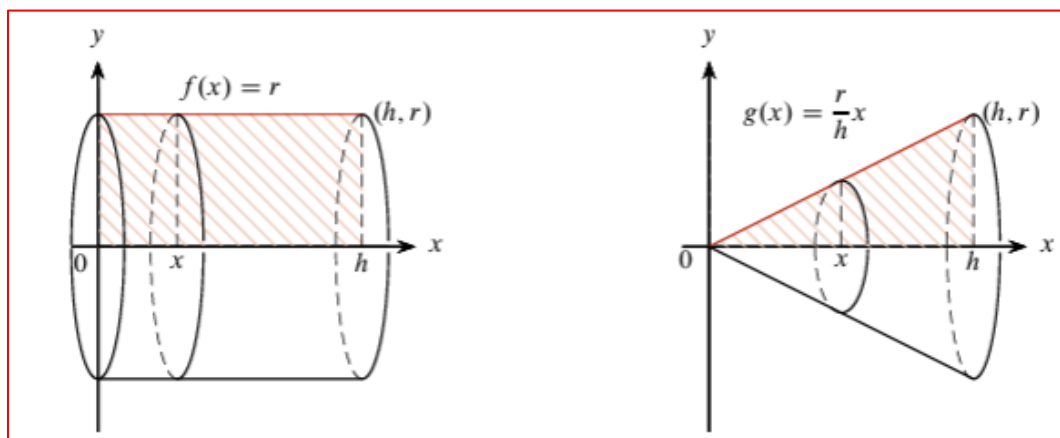
1 $y = 3x^2 - 7x + 2$ $y = -x + 2$	2 $x = 0$ $y = \sqrt{x+2}$ $y = \frac{1}{x+1}$ $x = 2$	3 $y^2 = 4x$ $4x - 3y = 4$	4 $y = x^3 - 3x^2$ $y = 15x - x^2$ $x \geq 0$
5 $x + 5y = y^2 - 4$ $2y = x + 10$	6 $2y^2 = x + 4$ $x = y^2$	7 $y = x$ $y = 3x$ $x + y = 4$	8 $y = e^x$ $y = e^{-x}$ $x = \ln 2$
9 $x = y^2 - 1$ $x - 4y = 4$	10 $y = 3e^{-x/3}$ $y = 0$ $x = 0$ $x = 9$	$y = x \sin x$ $y = x \cos x$ 11. $x = 0$ $x = \frac{\pi}{4}$	12. $y = \ln x$ $y = 0$ $x = e$
13. $y = \sqrt[3]{x-1}$ $y = x - 1$	$x = \frac{y}{\sqrt{16-y^2}}$ 14. $x = 0$ $y = 3$	15. $5y = 15 - 3x$ $5y = 5x^2 - 28x + 15$	16. $y = \sqrt{x-1}$ $x - 3y = 1$

Volumen de un sólido de revolución

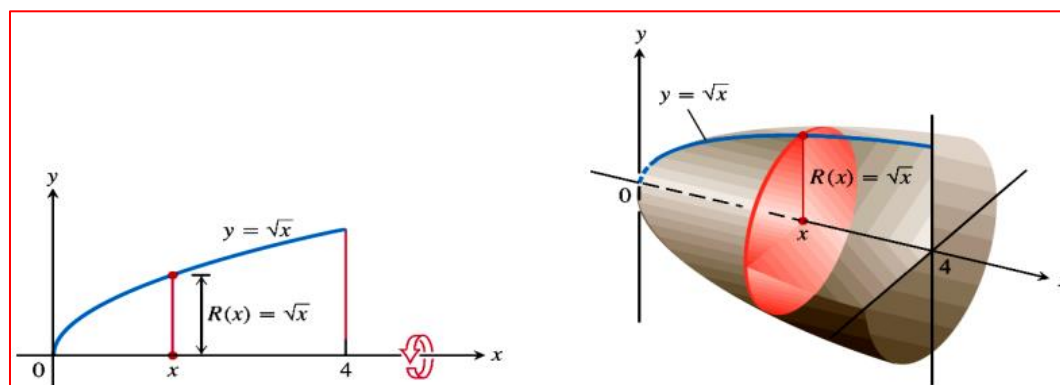
Consideremos nuevamente la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x)$; $y = g(x)$ y las rectas con ecuaciones $x = a$, $x = b$. De tal manera que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Queremos calcular el volumen del sólido que se genera cuando la región gira alrededor del eje x

Algunos ejemplos gráficos

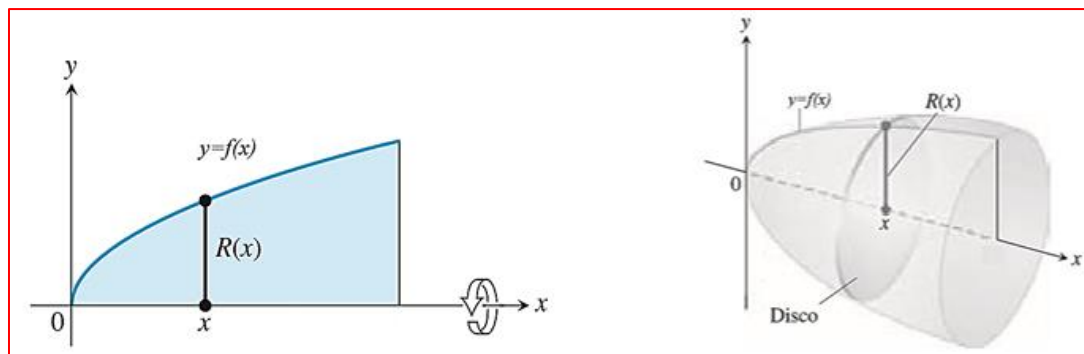
Ejemplo 1. ¿Cuál es el volumen de los siguientes sólidos? ¿Cómo puede calcularse?



Ejemplo 2. ¿Cómo calcularía el volumen del sólido generado?



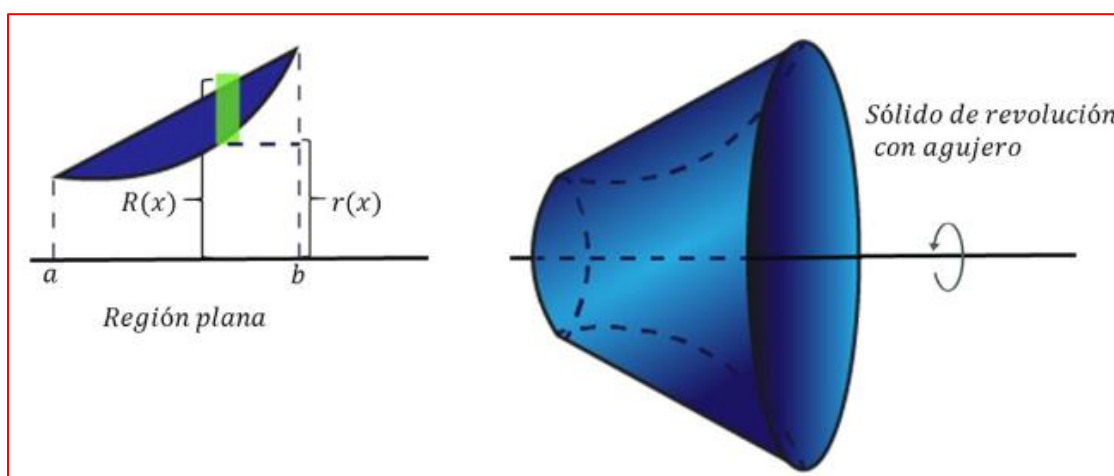
Ejemplo 3. ¿Cómo calcularía el volumen del sólido generado?



Conclusión 1. Para calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene, al rotar una función definida en el intervalo $[a, b]$, alrededor del eje de las x hacemos: $V = \pi \int_a^b [(f(x))^2] dx$.

Esta fórmula se obtiene considerando que el radio en cada corte circular es el valor de $f(x)$. El procedimiento de cálculo integral utiliza límites de sumas de volúmenes de pequeñas arandelas o cortes circulares infinitesimales del sólido de revolución.

Ejemplo 4. ¿Cómo calcularía el volumen del solido generado?



Conclusión 2. Para calcular el volumen del solido que se genera cuando la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x)$; $y = g(x)$ y las rectas con ecuaciones $x = a, x = b$, gira alrededor del eje x , usamos: $V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$; siempre que $f(x) \geq g(x)$.

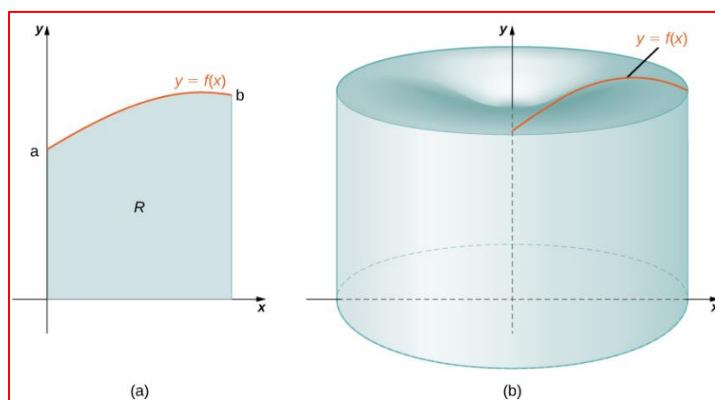
Ejercicio 3.

- Hallar el volumen del solido generado al girar alrededor del eje x , la superficie comprendida entre las parábolas con ecuaciones $g(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt{x}$.
- Determine el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer girar en torno al eje x la región del plano comprendida entre las curvas $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$.
- Determinar el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2$, $y = 4$, gira alrededor de:
 - el eje y
 - la recta con ecuación $y=4$
 - el eje x
 - la recta con ecuación $y=-1$
 - la recta con ecuación $x=2$
- Calcule el volumen del sólido de revolución cuando se hace girar el área comprendida entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4x - x^2$ alrededor a) del eje x b) del eje y .

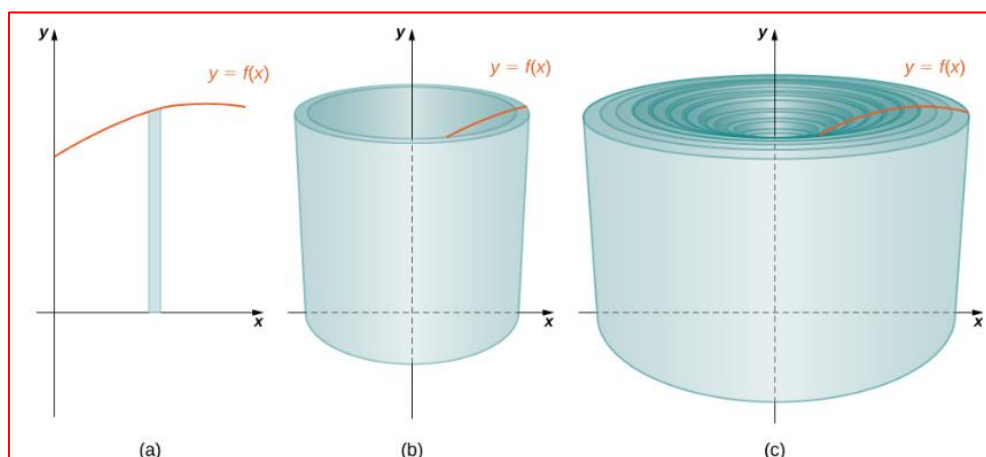
Ejercicio de profundización 2

1. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje x la región acotada por la parábola $f(x) = x^2 + 1$ y la recta $g(x) = x + 3$.
2. Calcule el volumen cuando la región acotada por las parábolas $x = y - y^2$ y $x = y^2 - 3$ se hace girar alrededor de la recta $x = -4$.
3. Se tiene la región acotada por las curvas $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine el sólido de revolución que se genera al hacer rotar la región entorno a: el eje x , el eje y , la recta $x = 2$, la recta $y = 4$.
4. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por las curvas $x = y^2 + 1$ y $x = -y^2 + y + 4$.

Supongamos ahora que, la región R , esta acotada arriba por la gráfica de una función $y = f(x)$, abajo por el eje x y a la izquierda y derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$, y giramos esta región alrededor del eje y .



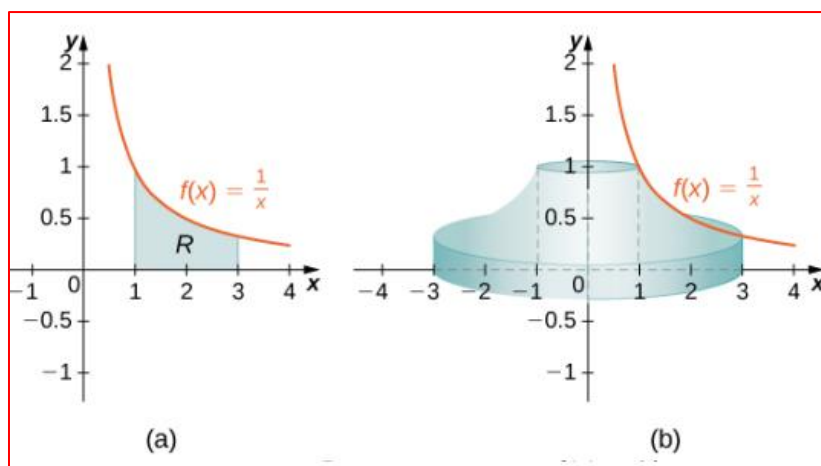
¿Cómo calculamos ahora el volumen de este sólido?



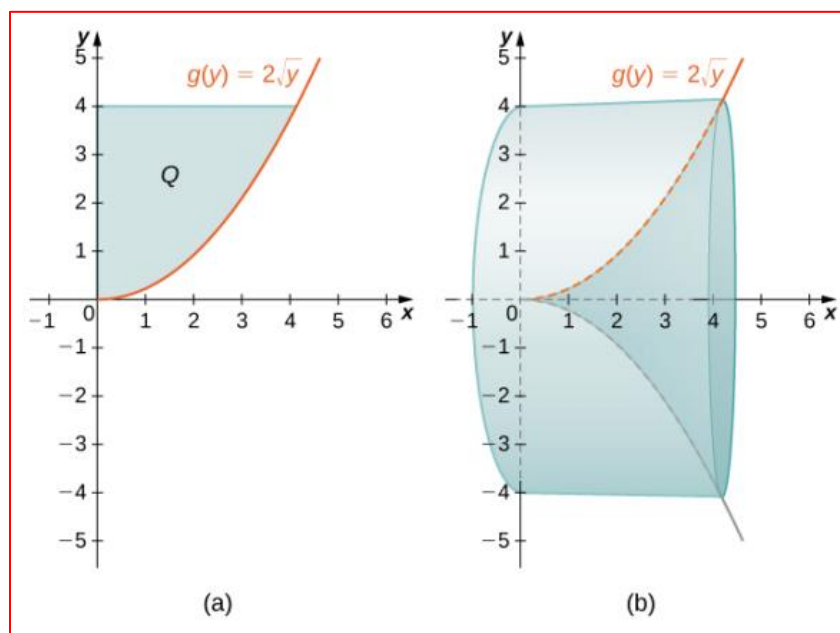
En este caso usamos para calcular el volumen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

Ejercicio 4. Calcular el volumen del solido obtenido en cada caso

Caso 1



Caso 2



Ejercicios de Repaso Áreas y Volúmenes de sólidos de revolución

Hallar el área de la región:

- Limitada por $x = 0$, $x = 2$ y la función $f(x) = x^3$
- Limitada por $x = 1$, $x = 3$, el eje x , la función $f(x) = -x^2 + 4x$
- Limitada por $x = -2$, $x = 1$, el eje x , la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$
- Limitada por $x = 1$, $x = 3$, el eje x , la función $f(x) = x + 1$
- Limitada por $x = 0$, $x = 2$, el eje x , la función $f(x) = x^3 + x$
- Limitada por $x = 1$, $x = 2$, el eje x , la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$

Hallar el área entre las curvas

- $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 8$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = 1$, con $x = 0$
- $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ y $g(x) = x$
- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 2x$
- Limitada por $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $x = 0$, $x = 2$
- Limitada por $f(x) = 6 - x^2$, $g(x) = -x$, $x = 0$, $x = 3$
- Limitada por $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = -\frac{1}{8}x^2$, $x = 0$, $x = 4$

Cálculo de volúmenes

- Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las gráficas de $y = 6 - 2x - x^2$ y $y = x + 6$ en torno al eje x .
- Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las gráficas de $y = 6 - 2x - x^2$ y $y = x + 6$ en torno a $y = 3$.
- Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x + 2$ en torno al eje x .
- Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las gráficas de $y = x^2 + 1$ y $y = x + 3$ en torno al eje x .

Integrales impropias

Al calcular $\int_a^b f(x)dx$, por Teorema Fundamental del Cálculo, se requiere que la función f sea continua en el intervalo finito $[a, b]$. Cuando el intervalo en consideración sea infinito, o la función f no sea continua en el intervalo $[a, b]$ presentando algún comportamiento asintótico vertical. La Integral recibe el nombre de integral impropia.

Se pueden presentar diferentes casos:

Caso 1: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$

Caso 2: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$

Caso 3: $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$, donde c es cualquier real

Caso 4: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x)dx + \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x)dx$, donde c es un punto de discontinuidad de f en el intervalo $[a, b]$

Si el límite o los límites existen, se dice que la integral impropia converge; de lo contrario, la integral impropia diverge.

Ejercicio 5. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias.

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ 2. $\int_0^\infty e^{-x} dx$ 3. $\int_0^\infty \sin x dx$ 4. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx$ 5. $\int_1^\infty (1-x)e^{-x} dx$ 6. $\int_{-\infty}^0 xe^{-2x} dx$

7. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$ 8. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 9. $\int_0^2 \frac{dx}{x^3}$ 10. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^5}$ 11. $\int_0^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$ 12. $\int_0^1 \ln x dx$

13. $\int_0^2 \frac{1}{4-x^2} dx$

	Método de los discos https://www.youtube.com/watch?v=DkT3umJMI8I Método de las ARANDELAS https://www.youtube.com/watch?v=FppCPrdG8sw Método de cascarones rotando alrededor de eje horizontal https://www.youtube.com/watch?v=BOi_3L042E Método de cascarones con dos funciones de y https://www.youtube.com/watch?v=XDZ8QZpeY78 Método de cascarones con dos funciones de x https://www.youtube.com/watch?v=m7cVhY5SGoY
Material complementario	• GeoGebra • Symbolab

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 31 de 43

Tema 4. Sucesiones y Series (4 semanas)	
Evaluación	Evento evaluativo de la temática 15 Valor 10% Autoevaluación permanente
Resultados de Aprendizaje	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Identificar sucesiones y series, sus definiciones, sus diferencias y sus criterios de convergencia. Conocer los diferentes métodos para analizar la convergencia o divergencia de una serie. Resolver problemas en diferentes contextos desde la aproximación de funciones mediante su desarrollo en series de potencias.
Criterios de desempeño	Decidir sobre la convergencia o divergencia de las series especiales Analizar la convergencia o divergencia de una serie usando diferentes criterios Aproximar funciones por medio de una serie de potencias.

Guía de trabajo
Pregunta Orientadora ¿Cómo determinar si una sucesión o una serie son convergentes y como aplicar este conocimiento para resolver problemas prácticos en ingeniería? Sucesiones y series Definición. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, los números en la imagen de una sucesión se representan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ y se denominan términos de la sucesión. A a_n se le llama termino enésimo de la sucesión la cual se presenta $\{a_n\}$.

Ejercicio 1. Escriba los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a. $c_n = \frac{1-n}{n^2}$

b. $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+2}$

c. $b_n = \frac{\sqrt{3n^2+2}}{2n+1}$

d. $a_n = \frac{n \cos(n\pi)}{2n-1}$

e. $b_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

f. $c_n = \frac{1}{n!}$

g. $a_n = 2 + (-1)^n$

h. $b_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

i. $c_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$

j. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$

Definición. Dada una sucesión $\{a_n\}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Existe la sucesión se dice **Convergente**, si el límite no existe la sucesión se dice **Divergente**

Nota importante. El límite de una sucesión se encuentra usando las mismas propiedades conocidas para límites en funciones de valor real.

Ejercicio 2. Utilice el límite para analizar la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones.

1. $\left\{ \frac{3n}{2n+3} \right\}$

2. $\left\{ \frac{n^2+5}{2n^2+3n-5} \right\}$

3. $\left\{ \frac{2e^n}{n} \right\}$

4. $\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\}$

Ejercicio de profundización 1. Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes sucesiones.

a. $c_n = \frac{3n^2+2}{3n-1}$

b. $a_n = \frac{n^3+3n^2+3n}{(2n+1)^3}$

c. $b_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}$

d. $c_n = \frac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$

e. $a_n = \frac{(-\pi)^n}{5^n}$

f. $b_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

g. $c_n = \frac{\sin^2 n}{n}$

h. $a_n = \frac{n}{2^n}$

i. $b_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

j. $c_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

k. $a_n = \frac{n!}{2^n 3^n}$ Sugerencia: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

l. $b_n = \sqrt[n]{n^2}$

m. $c_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

n. $a_n = \frac{3^{n-1}}{2^n}$

o. $b_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

p. $c_n = n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$

Para tener presente:

Definición. Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es **monótona** si la sucesión es:

- Creciente, es decir, si para toda n , $a_n \leq a_{n+1}$
- Decreciente, es decir, si para toda n , $a_n \geq a_{n+1}$

Definición. Una sucesión $\{a_n\}$ es acotada si existe un número real positivo M tal que $|a_n| \leq M$ para toda n .

Teorema. Si una sucesión es monótona y acotada es convergente.

Ejercicio 3. Completar las siguientes tablas.

Tabla 1

Términos de la sucesión	Término general	Expresión recursiva	Acotación	Monotonía	Convergencia
1, 3, 5, 7, 9, ...					
Sucesión aritmética					
	$n!$				
		$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n, n \geq 0 \end{cases}$			
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$					
Sucesión geométrica					
	$\frac{1}{n}$				
		$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1 \end{cases}$			

Tabla 2

Términos de la sucesión	Término general	Expresión recursiva	Acotación	Monotonía	Convergencia
4, 7, 10, 13, 16, ...					
	$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}, n \geq 1$				
		$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -2a_n, n \geq 1 \end{cases}$			
$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$					
	$\frac{1}{n!}$				
		$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} - 2, n \geq 2 \end{cases}$			
			No acotada (ni inferior, ni superiormente)	No monótona	
			Acotada	Monótona creciente	
				No monótona	Convergente

Series infinitas

Definiciones. Si $\{a_n\}$ es una sucesión y $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ para todo entero positivo, entonces se llama serie infinita, representada como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a la sucesión $\{s_n\}$. Al número a_n se le llama *enésimo término* de la serie y s_n se denomina *enésima suma parcial* de la serie. Una serie es, entonces, una sucesión de sumas parciales.

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\{s_n\}$ la sucesión de sumas parciales que la define. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ existe, se dice que la serie converge a s y a este número se le denomina la *Suma de la serie*. Si el límite no existe, se dice que la serie diverge y no tiene suma.

Criterios de Convergencia

1. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, de aquí se desprende que, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ entonces la serie es divergente.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente y la suma es S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ también es convergente y su suma es CS. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ también diverge.
3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series convergentes con sumas S1 y S2, entonces la series $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge a $S1 \pm S2$
4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

Algunas series Especiales

Series Especiales

Las siguientes series se usan como series de referencia ara evaluar la convergencia de otras series.

Serie Armónica: Se llama serie armónica a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie divergente.

Serie Geométrica: Se llama serie geométrica a una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

Primer término de la serie a

Razón de la serie r

La serie geométrica converge a $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ en otros casos es divergente.

Serie Hiperarmónica o serie P: se llama serie p a una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

La serie p converge si $1 < p$ y diverge en cualquier otro caso, si $p=1$ es la Serie Armónica divergente.

Ejercicio 4.

- Determine si las siguientes series geométricas convergen o divergen y halle el valor de convergencia en aquellos casos que sea posible.

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n}$$

- Determine si las siguientes series p convergen o divergen

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^2$$

- Determine si las siguientes series convergen o divergen y halle el valor de la suma de ser posible. Sugerencia: Utilice los teoremas para suma y diferencia de series.

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} - 2^{-3n}$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} 4n^{-1} + 3^{1-n}$$

4. Muestre usando el límite que las siguientes series son divergentes.

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$$

$$g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \tan n$$

$$h. \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ejercicio investigativo 1. Responder la pregunta ¿Qué es una serie telescópica y como se analiza su convergencia? Luego Determine la suma de las siguientes series telescópicas:

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-1}$$

$$f. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$$

$$b. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$$

$$g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$c. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\sqrt{n+1} - \ln\sqrt{n}$$

$$h. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$d. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}$$

$$i. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$e. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} - \frac{3}{(n+1)^2}$$

$$h. \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1)$$

Criterio de la integral

Sea f una función continua de valor positivo y decreciente para toda $x \geq 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie de términos positivos y $f(n) = a_n$ para todo $n \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergen ambas o divergen ambas.

Ejercicio 5. Establezca la convergencia o divergencia de las siguientes series utilizando el criterio de la integral.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n/3}}$

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$

k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1+n^2}$

l. $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

Series alternas

Definición: una serie es alterna o alternante si sus términos son alternadamente positivos y negativos de una de estas formas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

Criterio de convergencia de series alternas: dada una serie alterna $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ Si se cumple que $a_n \geq a_{n+1}$ para toda n y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces la serie es convergente.

Ejercicio 6. Analizar las siguientes series

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+2} \frac{3n+2}{4n^2-3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$

Definiciones importantes y criterios de convergencia absoluta.

Definición: se dice que la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (AC), si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Definición: una serie convergente pero no absolutamente convergente se dice condicionalmente convergente (CC)

Nota: toda series AC es Convergente.

Prueba del cociente (criterio de la razón)

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, con $a_k \neq 0$ para todo k , suponga que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L.$$

Entonces

- (i) si $L < 1$, la serie converge absolutamente,
- (ii) si $L > 1$ (o $L = \infty$), la serie diverge y
- (iii) si $L = 1$, no hay conclusión.

Prueba de la raíz

Dada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, suponga que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$. Entonces

- (i) si $L < 1$, la serie converge absolutamente,
- (ii) si $L > 1$ (o $L = \infty$), la serie diverge y
- (iii) si $L = 1$, no hay conclusión

Ejercicio 7.

1. Utilizando el criterio de la razón determine la convergencia o divergencia de las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n 3^{n-1}}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 - 2^n}{n!}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)^2}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

2. Utilizando el criterio de la raíz determine la convergencia o divergencia de las siguientes series.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(e^2 + \frac{1}{n}\right)\right]^{n+1}$

f. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Ejercicio de profundización 2

Analizar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{100}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(2n)!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100} 5^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

SERIES DE POTENCIAS

Definición: si x es una variables real, se llama serie de potencias en $x - c$ (o centrada en c) a una serie de la forma.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots$$

Un caso especial se presenta cuando $c = 0$, entonces la serie es una serie de potencias en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Teorema: Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$ se cumple exactamente una de estas tres opciones:

- La serie converge únicamente en $x = c$
- La serie converge para toda x en los reales
- Existe un numero R positivo de modo que la serie es AC para toda x tal que $|x - c| < R$ y diverge en otro caso.

Al número real R se le llama radio de convergencia y al conjunto de valores de x para los que la serie converge se denomina intervalo de convergencia.

Para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias se usan los criterios de convergencia absoluta: de la razón y de la raíz. Si la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ y aplicamos el criterio de la razón

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right| = |x-c| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-c| L$$

Si $L = 0$, la serie converge para toda x en los reales

Si $L = \infty$, la serie converge únicamente en $x = c$

Si L es un número real positivo, la serie converge para toda x tal que $|x-c| < \frac{1}{L}$

Ejercicio 8. Hallar el Intervalo de Convergencia de cada una de las siguientes series

$$\begin{array}{lllll} 1. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n! x^n}{10^n} & 2. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{2n!} & 3. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n n^2} & 4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n x^n}{3^n} & 5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} \\ 6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n x^n}{n+1} & 7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{n^2} & 8. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} & 9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(x - \frac{2}{3}\right)^n}{4^n} & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} & 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-5)^n \end{array}$$

Representación de una función en series de potencia

Si una función f es infinitamente diferenciable en $x = c$, entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \dots \text{ Se llama la serie de Taylor de } f \text{ en } c.$$

Cuando $c = 0$, la serie se conoce como la serie de Maclaurin de f :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots$$

Series de Maclaurin básicas:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ Para toda } x \text{ en los reales}$$

$$\text{Sen}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ Para toda } x \text{ en los reales}$$

$$\text{Cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ Para toda } x \text{ en los reales}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ para } x \in (-1, 1)$$

Ejercicio 9.

- Hallar la serie de Maclaurin para las siguientes funciones: $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{3x}$, $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
- Hallar la serie de Maclaurin para las siguientes funciones: $f(x) = \text{Sen}x$, $f(x) = \text{Sen}x^2$, $f(x) = \text{Sen}3x$
- Hallar la serie de Taylor de $f(x) = \text{Sen}\pi x$ centrada en 1
- Hallar la serie de potencias de $f(x) = \frac{1}{1+x}$, y $f(x) = \ln(x+1)$
- Hallar la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x \text{Cos}x$ hasta el termino x^4
- Evaluar con una aproximación de 3 decimales
 - $\int_0^1 \text{Cos}\sqrt{x} dx$
 - $\int_0^{1/2} \frac{\text{Sen}x}{\sqrt{x}} dx$
 - $\int_1^2 e^{-x^3} dx$

Videos de apoyo

Sucesiones infinitas.

<https://www.youtube.com/watch?v=ugIj8Sf2JZo>

Series (Primera parte)

https://www.youtube.com/watch?v=NwxWX_RFWQ8

Divergencia y convergencia de Series - Criterio de comparación

<https://www.youtube.com/watch?v=Ok4saPFmmis>

Convergencia y divergencia de series - Criterio de la raíz

<https://www.youtube.com/watch?v=LJcQjD2t6Eo>

Divergencia y convergencia de series - Criterio de la integral

<https://www.youtube.com/watch?v=rYfF5vCix4A>

Convergencia y divergencia de series - Criterio de la razón

<https://www.youtube.com/watch?v=txAiKO5JU78>

Aplicaciones de los desarrollos en serie de potencias

<https://www.youtube.com/watch?v=iPNUVyspoXA>

Material complementario

- GeoGebra
- Symbolab