

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 1 de 24

“Las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos”

Información general de la asignatura Nombre: Geometría Programa académico: Ingeniería Informática – Ingeniería Industrial – Ingeniería Electrónica.	
Prerrequisitos para el aprendizaje Académicos: Conocimientos básicos de aritmética, operaciones básicas con números reales, propiedades de los números reales, potenciación y radicación, conceptos básicos de álgebra: operaciones algebraicas, suma, resta, multiplicación y división de polinomios, principales casos de factorización. Personales: Disposición, deseos de aprender, responsabilidad y disciplina.	Requerimientos técnicos: Correo institucional
Referencias Texto 1: Riquenes Rodríguez, M. (2007). Compendio de geometría. Editorial Universitaria. https://elibro.net/es/lc/iue/titulos/71330 Texto 2: Etter, D. (2015). Introduction to GEOGEBRA. (3a. ed.) Pearson Educación. Tomado de http://www.ebooks7-24.com/?il=5431 Texto 3: Larson, R. (2015). Fundamentos de álgebra lineal. (7a. ed.) Cengage. Tomado de http://www.ebooks7-24.com/?il=1302 Texto 4 Rojas Álvarez, C. J. (2015). Introducción a la geometría. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/iue/69957?page=9. Texto 5: Roig Sala, B. Estruch Fuste, V. D. y Estruch Fuste, V. D. (2018). Geometría euclídea. Valencia, Spain: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia. Recuperado de https://elibro.net/es/ereader/iue/57468?page=7. Texto 6: Carpintheyro, E. (2018). Geometría analítica. Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/iue/titulos/40188	Contenido de la asignatura por temáticas Tema 1: Introducción a la Geometría Analítica Tema 2: Introducción a la geometría Vectorial Tema 3: Rectas y planos en el espacio

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 2 de 24

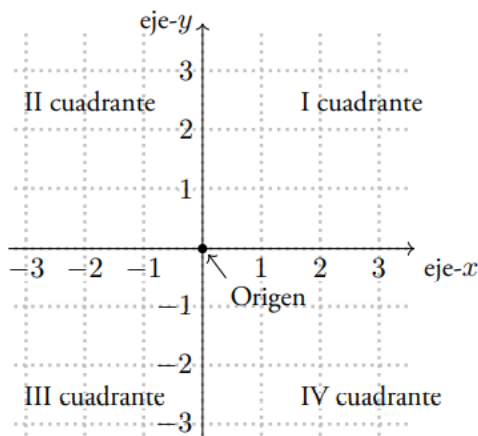
Ruta de aprendizaje

Tema 1. Introducción a la Geometría Analítica. (6 semanas)	
Actividades	Por parte del docente: presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo. Por parte del estudiante: Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo
Evaluación Temática 1	Semana 3: Examen corto individual (10%) Semana 6: Examen corto individual (10%)
Resultados de Aprendizaje.	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Reconocer los elementos básicos de la geometría analítica: puntos en el plano; ecuación de la recta en el plano; cónicas, elementos y graficas. Utilizar los diferentes conceptos relacionados con los elementos básicos de la geometría analítica en la solución de diversos problemas en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Identifica los conceptos básicos de la geometría analítica. Halla las ecuaciones de la recta conocido algunos elementos de esta. Identifica las diferentes curvas cónicas existentes. Encuentra las ecuaciones de las diferentes cónicas conocidos algunos elementos de estas.
Guía de trabajo La geometría analítica es una herramienta más, con la cual los futuros ingenieros cuentan para la resolución de problemas en diferentes contextos. Vincula el álgebra y la geometría y tiene múltiples aplicaciones en diversas áreas como son: la topografía, la física, la biomatemática, la astronomía, ingeniería, arquitectura, arqueología, cartografía, sociología, geografía, marketing, economía, logística y muchas más. Pregunta orientadora: ¿Por qué es importante el estudio de la geometría analítica en la formación de ingenieros?	

Conceptos básicos

El plano cartesiano

El plano cartesiano es representado por dos rectas reales que forman un ángulo recto, así:



Así como al conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es representado por los puntos de una recta (la recta real), el conjunto de los pares ordenados de números reales puede representarse como puntos de un plano, el cual es denominado el plano cartesiano. Tal representación es denominada sistema de coordenadas y fue establecida en 1637 por el filósofo francés René Descartes.

La recta horizontal real es denominada eje de abscisas o eje x , y la recta vertical real es usualmente llamada eje de ordenadas o eje y .

El plano también puede ser identificado como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo. De ahí que suele denotarse como $\mathbb{R}^2$.

El punto de intersección de los ejes es denominado origen de coordenadas y dichos ejes determinan cuatro conjuntos llamados cuadrantes.

Usaremos letras mayúsculas como por ejemplo $A, B, C, \dots$ para representar los elementos de $\mathbb{R}^2$. Los números reales x e y del par ordenado (x, y) son denominados primera coordenada y segunda coordenada, respectivamente.

Ejercicio de discusión 1

- ¿Cómo se representa un punto en el plano cartesiano?
- ¿Por qué se les llaman a las coordenadas cartesianas, coordenadas rectangulares?

Distancia entre puntos

la distancia entre los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ denotado por $d(A, B)$, se define como:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio M

El punto medio entre dos puntos del plano se puede calcular como el promedio de sus respectivas coordenadas, esto es, $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ entonces el punto medio M viene dado por:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejercicio 1

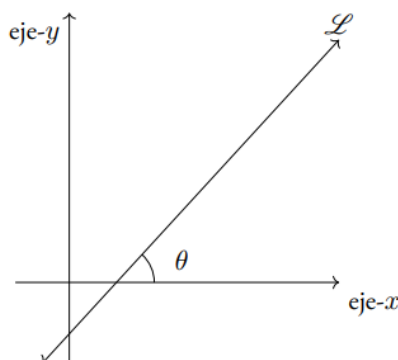
- A. En el plano cartesiano. Localizar $A(-2, -6)$, $B(1, -2)$, $C(7, 6)$, $D(6, 0)$ y $E(3, 4)$, además hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{BE}$.
- B. Dibujar el triángulo ABC , con $A(-1, -5)$, $B(-3, 2)$, $C(6, -3)$. ¿Cómo clasificaría el triángulo ABC ?
- C. La distancia entre $A = (2, 4)$ y $B = (5, y)$ es $\sqrt{13}$. Determine el valor de y . ¿Existe algún valor de y para el cual la distancia entre A y B es 2?
- D. Si los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, -1)$ y $C = (4, y)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, determine el valor de y .

Ecuación general de una recta

Toda recta $\mathcal{L}$ es un conjunto de puntos que cumplen una ecuación lineal o de primer grado, es decir

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\}$$

Se define el ángulo de inclinación de una recta $\mathcal{L}$ como el ángulo, medido en grados sexagesimales o radianes, asociado a la razón de cambio de dos puntos diferentes cualesquiera de esta:



Dada una recta $\mathcal{L}$, se define su pendiente como la tangente de su ángulo de inclinación o como la razón de cambio de dos puntos diferentes de esta.

Teorema

Sean l_1 y l_2 dos rectas diferentes, estas son paralelas si y solo si tienen el mismo ángulo de inclinación. Si son rectas no verticales, entonces estas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Dado que una recta está bien definida por dos puntos diferentes por donde este pase, se deduce que cualquier recta no vertical está definida si se conoce un punto sobre ella y el valor de su pendiente, es decir dados $P = (x_0, y_0)$ y $m \in \mathbb{R}$, la recta $\mathcal{L}$ con pendiente m que pasa por P , tiene por ecuación punto-pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Tener presente:

- La pendiente de una recta con ángulo de inclinación mayor que 0° pero menor que 90° es positiva. Si el ángulo es mayor que 90° entonces la pendiente es negativa.
- Si tenemos una recta con ángulo de inclinación 0° , esta es paralela al eje x , es decir es horizontal. Pero si el ángulo es 90° , esta es paralela al eje y , es decir es vertical.

Teorema

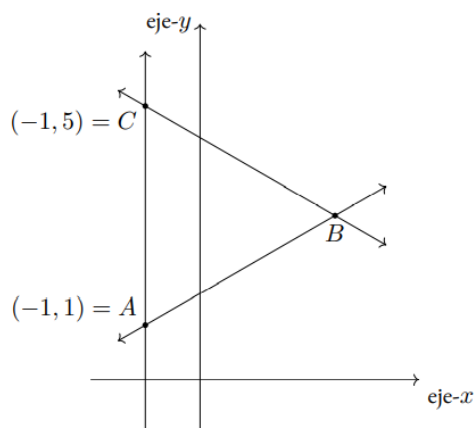
Sean l_1 y l_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente. Se cumple que l_1 es perpendicular a l_2 si y solo si $m_1 m_2 = -1$.

Ejercicio de investigación

- A. ¿Existe otra forma para la ecuación de la recta en el plano? ¿Cuál?
B. Conocidos dos puntos sobre una recta ¿cómo se halla la pendiente?

Ejercicio 2

- A. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(2,3)$, $B(-6,7)$
B. Halle la ecuación de la recta que pasa por el origen, y es paralela a: $3x - 4y + 6 = 0$
C. Halle la ecuación de recta que pasa por $E(0,3)$ y perpendicular a $2x - 3y + 6 = 5$
D. Determinar el punto de intersección entre las rectas l_1 y l_2 de ecuaciones $3x - 2y + 7 = 0$ y $2x + 3y - 3 = 0$
E. Halle la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y por la intercepción de las rectas $x - y = -1$ y $2x + y = 7$
F. Sean $A(-2, -5)$ y $C(4, 3)$ dos puntos, y $\mathcal{L}$ la recta de ecuación $3x + 4y - 19 = 0$. Determine el punto de intersección entre $\mathcal{L}$ y la recta que pasa por A y C . Además, grafique ambas rectas en un mismo plano.
G. Determine B , para que el triángulo ABC de la figura sea equilátero.

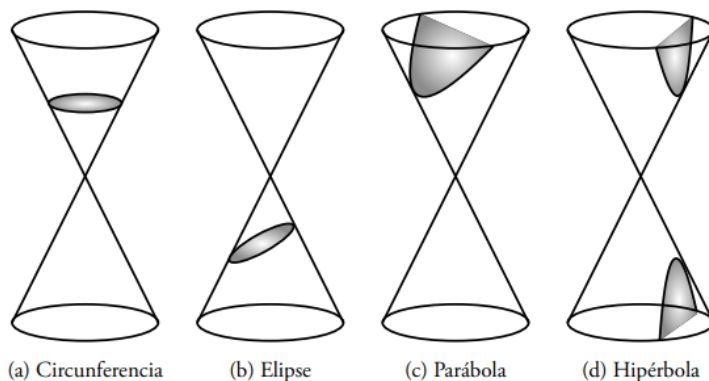


Ejercicio de profundización 1

- En cada caso, determine los puntos de intersección con los ejes coordenados de la recta dada:
 - $y + x + 1 = 0$
 - $y - x - 1 = 0$
 - $y = 2x - 6$
 - $y - 20 = 5(x - 8)$
- En cada caso, determine el punto de intersección entre las rectas dadas:
 - $y = 2x + 5$; $x + y - 5 = 0$
 - $y = x + 5$; $x + y - 1 = 0$
 - $y = 3x - 6$; $-x + 2y - 4 = 0$
 - $y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$; $y - 5 = -\sqrt{3}(x - 1)$
- Verifique si el punto $(1, -2)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$.
- Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 3)$ y es paralela a la recta de ecuación $4x + 4y + 19 = 0$.
- Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y - 6 = 0$.
- Determine los valores de a y b , tal que la recta de ecuación $ax - by + 4 = 0$ pase por los puntos $(-3, 1)$ y $(1, 6)$.

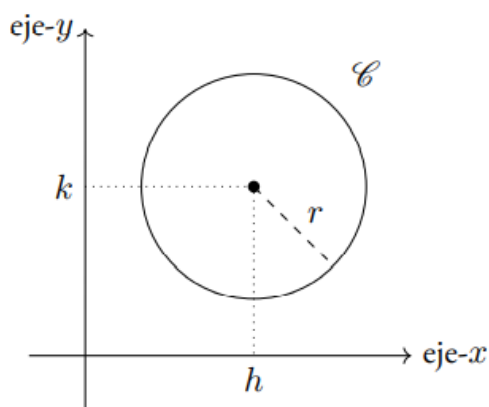
Cónicas

Se denomina cónicas a las curvas que se obtienen de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano que no pasa por su vértice:



Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro y dicha distancia común es denominada radio.



Es decir, la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

Es usual decir que $\mathcal{C}$ tiene por ecuación estándar a la expresión: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ejercicio 3

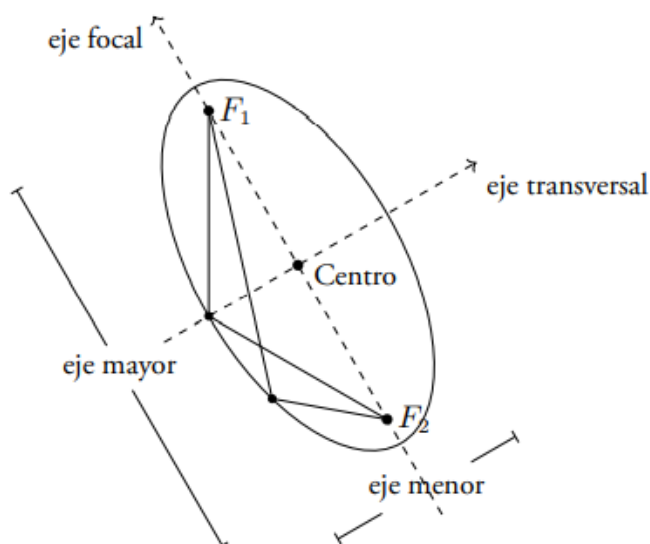
A. Determinar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$

B. Si la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 2y + k = 0$ es tangente al eje x , determine el valor de k .

C. Determine la ecuación de la circunferencia de centro $(3, 5)$ tal que la recta de ecuación $y - 9 = 0$ es tangente a la misma.

Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos del plano tal que la suma de distancias de dichos puntos a dos puntos fijos, llamado focos, es una constante positiva.



Es decir, la elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 y F_2 con parámetro p (donde $p > 0$) es el conjunto

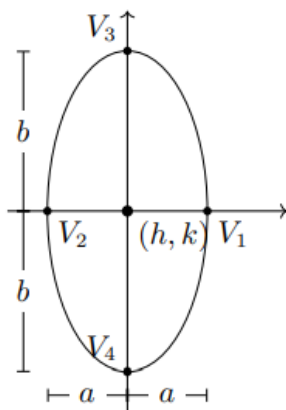
$$\mathcal{E} = \{Q \in \mathbb{R}^2 : d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2p\}.$$

La recta que pasa por los focos se denomina eje focal, al segmento sobre el eje focal y limitado por la elipse se denomina eje mayor, el punto medio de los focos se denomina centro de la elipse. Finalmente, la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal se llama eje transversal y al segmento determinado por el eje transversal y la elipse se le denomina eje menor.

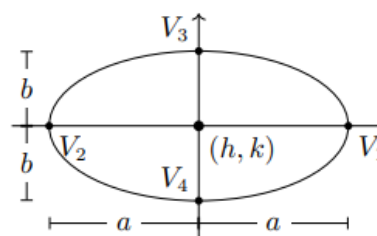
Teorema. Sea $\mathcal{E}$ la elipse con focos sobre una recta vertical (o recta horizontal). Ocurre que

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

a y b se denominan radios de la elipse. El centro de la elipse tiene por coordenadas $C = (h, k)$. Además, los puntos de intersección de sus ejes con la elipse son denominados vértices de ella.



(a) Eje mayor vertical



(b) Eje mayor horizontal

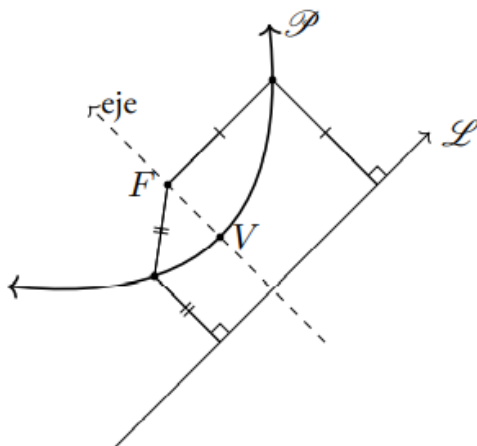
Cualquier elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados tiene a sus vértices ubicados en el eje paralelo al eje de abscisas, los que tienen por coordenadas $V_1 = (h + a, k)$ y $V_2 = (h - a, k)$. De igual forma, sus vértices ubicados en el eje paralelo al eje de ordenadas tienen coordenadas $V_3 = (h, k + b)$ y $V_4 = (h, k - b)$. Es importante mencionar que, en algunos textos, las letras a y b son reservadas para los ejes mayor y menor, respectivamente.

Ejercicio 4

- A. Encuentre la ecuación estándar de la elipse con focos $(0, 1)$ y $(4, 1)$, y con eje mayor igual a 12.
- B. Determine el centro, los vértices y los focos de la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$. Además, bosqueje la gráfica de $\mathcal{E}$.
- C. Calcule la longitud del eje mayor de la elipse $\mathcal{E}$ que pasa por el punto $(1, 5)$ y cuyos focos tienen coordenadas $(5, 2)$ y $(-3, 2)$. Además, determine la ecuación y gráfica de $\mathcal{E}$.

Parábola

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo F , llamado foco, y de una recta fija $\mathcal{L}$, llamada directriz.



La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se denomina eje de la parábola o eje focal. El punto de intersección entre la parábola y su eje (el punto V) se denomina vértice.

Teorema. Sea $\mathcal{P}$ una parábola con foco $F = (f_1, f_2)$ y directriz de ecuación $y = p$. Entonces

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a(x - h)^2 + k\}$$

Donde

$$h = f_1, k = \frac{f_2 + p}{2} \text{ y } a = \frac{1}{2(f_2 - p)}$$

Así, toda parábola con eje vertical tiene como ecuación canónica: $y = a(x - h)^2 + k$. Donde el vértice tiene coordenadas (h, k) . Además, en este caso se dice que ella se abre hacia arriba si a es positivo. De igual forma, se dirá que se abre hacia abajo cuando el valor a es un número negativo.

Teorema. Sea $\mathcal{P}$ una parábola con directriz paralela al eje- y , entonces $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(y - k)^2 + h\}$. En este caso, el vértice de $\mathcal{P}$ también tiene coordenadas (h, k) . Se dirá que $\mathcal{P}$ se abre hacia la derecha si $a > 0$ y que se abre hacia la izquierda cuando $a < 0$.

Ejercicio 5

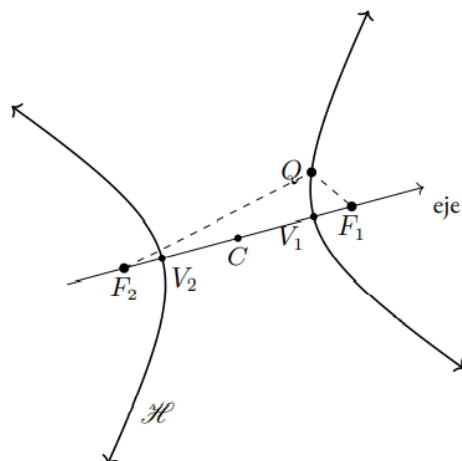
- A. Dada la ecuación de la parábola $\mathcal{P} : 3x^2 - 30x + 24y + 43 = 0$, determine su vértice, foco y la ecuación de su recta directriz.
- B. Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice V está en $(-3, 4)$ y cuyo foco F tiene coordenadas $(-5, 4)$.

- C. Determine la ecuación de la parábola con eje horizontal que pasa por los puntos $A = (3, 3)$, $B = (6, 5)$ y $C = (6, -3)$.
- D. Determine la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ con eje vertical, vértice en $(-1, -4)$ y que pasa por $(1, 0)$.
- E. Consideremos la parábola $\mathcal{P}$ de ecuación $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta $\mathcal{L}$ de ecuación $y = -x + 3$. Determine. El vértice de la parábola y los dos puntos de intersección entre la parábola y la recta.
- F. Sea $\mathcal{P}_1$ una parábola de ecuación $y = \frac{1}{8}(x - 4)^2 + 2$. Determine la ecuación de la parábola $\mathcal{P}_2$ con vértice ubicado en el foco de $\mathcal{P}_1$ y cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas, si además se sabe que $\mathcal{P}_2$ se abre hacia la derecha y pasa por el punto de coordenadas $(6, 8)$.
- G. Se tiene la parábola $\mathcal{P}$ de ecuación $y^2 - 16x = 0$ y la recta de ecuación $x + y - 5 = 0$. Determine los puntos de intersección entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{L}$.

Hipérbola

Una hipérbola $\mathcal{H}$ es el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias de tales puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2 , llamados focos, es constante.

$$\mathcal{H} = \{Q \in \mathbb{R}^2 : |d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2p\}$$



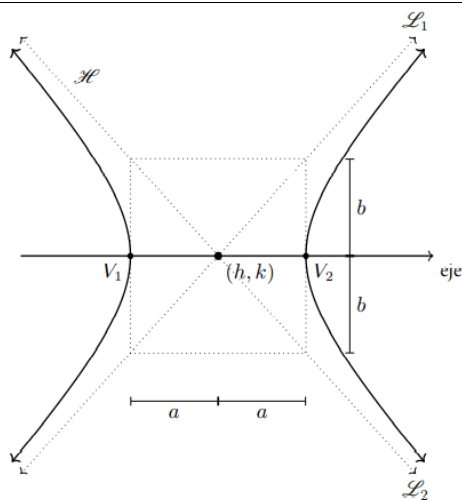
La recta que pasa por los focos se denomina eje focal o simplemente eje. El punto medio de los focos, el punto C , se llama el centro de la hipérbola. Los puntos de intersección del eje con las hipérbolas, los puntos V_1 y V_2 , reciben el nombre de vértices de la hipérbola.

Teorema. Sea $\mathcal{H}$ una hipérbola con eje focal horizontal. Se cumple que

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

donde a y b son dos números positivos.

Se tiene que el centro de la hipérbola $\mathcal{H}$ tiene coordenadas (h, k) . En este caso los vértices tienen coordenadas $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$. Además, en este caso, las rectas de ecuaciones $\mathcal{L}_1 : y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ y $\mathcal{L}_2 : y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$ se denominan asíntotas de $\mathcal{H}$.

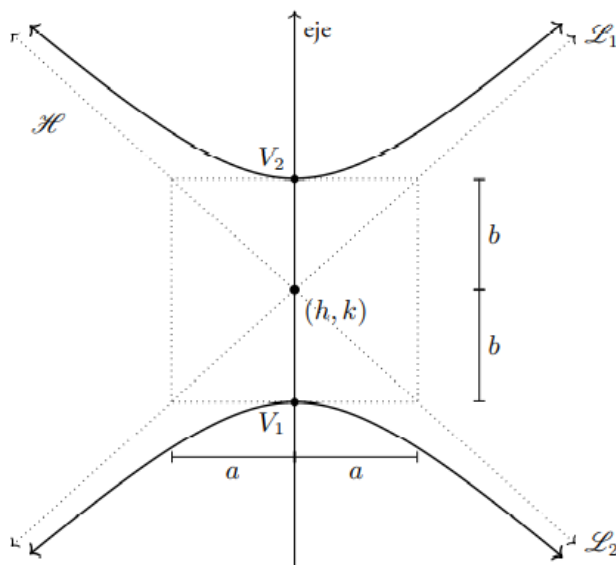


Teorema. Sea $\mathcal{H}$ una hipérbola con eje focal vertical. Se cumple que

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(y - k)^2}{b^2} - \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1 \right\}$$

donde a y b son dos números positivos.

El centro de la hipérbola $\mathcal{H}$ tiene coordenadas (h, k) . En este caso, los vértices tienen coordenadas $V_1 = (h, k - b)$ y $V_2 = (h, k + b)$. Además, en este caso, las rectas de ecuaciones $\mathcal{L}_1 : y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ y $\mathcal{L}_2 : y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$



Tener presente que:

Las asíntotas de una hipérbola se intersectan en el centro de la hipérbola.

El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento determinado por los vértices de la hipérbola.

Ejercicio 6

- A. Determine la ecuación de la hipérbola con centro en $(1, 2)$, eje focal vertical cuyos vértices están distanciados 8 unidades y cuya distancia del centro a uno de los focos es 5 unidades.
- B. Determine la ecuación de la hipérbola con vértices $(3, -5)$ y $(3, 1)$ y cuyas asíntotas tienen ecuaciones $y = 2x - 8$ e $y = -2x + 4$.

Ejercicio de profundización 2

1. Determine el centro y radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

b) $2x^2 + 2(y - 1)^2 - 3 = 15$

c) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$

d) $x^2 - 2x + y^2 - y = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

f) $2(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 - y^2$

2. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el eje de abscisas y pasa por los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (4, 6)$.
3. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene como extremos a los puntos de coordenadas $(3, -1)$ y $(-2, -4)$.
4. Indique si las siguientes ecuaciones corresponden a elipses; en caso afirmativo, determine su centro, sus vértices y sus focos.

a) $5x^2 + 4y^2 - 30x - 4y + 46 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

c) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

5. En los siguientes ejercicios determine la ecuación, en la forma canónica, para la elipse que satisfaga las condiciones dadas:

- a) Focos $(\pm 2, 0)$, longitud del eje mayor es 10.
- b) Los vértices son $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 5)$
- c) Dos vértices tienen coordenadas $(0, \pm 6)$ y longitud del eje menor es 8.
- d) Dos vértices tienen coordenadas $(1, -4)$ y $(1, 8)$, y la longitud del eje menor es 8.
- e) Los focos son $(1, -4)$ y $(5, -4)$, los vértices asociados al eje mayor son $(0, -4)$ y $(6, -4)$.
- f) Los vértices asociados al eje mayor son $(3, -7)$ y $(3, 3)$, y la longitud del eje menor es 6.

6. Grafique y calcule el vértice de cada una de las siguientes parábolas cuyas ecuaciones son:

a) $y = 4x^2 + 12x + 9$

b) $y = -x^2 + 4x - 5$

c) $y = 2x^2 - 4x + 3$

d) $y = -3x^2 + 6x - 5$

7. Una parábola tiene su vértice V en el semieje negativo del eje de abscisas. Además, pasa por los puntos $A = (0, -3)$ y $B = (0, 3)$. Determine la ecuación de la parábola si $d(V, A) = 5$.

8. Sea $\mathcal{P}$ la parábola con foco en $(0, 1/4)$, cuya recta directriz es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto $(0, -1/4)$; determine la ecuación de $\mathcal{P}$.

9. Para cada una de las siguientes hipérbolas determine las coordenadas del centro:

a) $\mathcal{H}_1 : 3x^2 - 2y^2 - 4y - 26 = 0$

b) $\mathcal{H}_2 : 9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y - 16 = 0$

c) $\mathcal{H}_3 : 49y^2 - 4x^2 + 98y - 48x - 291 = 0$

d) $\mathcal{H}_4 : 9x^2 - 4y^2 + 90x + 189 = 0$

e) $\mathcal{H}_5 : x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$

f) $\mathcal{H}_6 : 4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 81 = 0$

10. Clasifique las siguientes cónicas:

a) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + 3y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$

c) $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

e) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

f) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$

g) $x^2 + 4(y^2 - x) + 8(y - 1) = 0$

h) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

i) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

Referencias

Texto: Introducción a la geometría analítica (Doi: <http://dx.doi.org/10.21678/978-9972-57-466-5>)

Autores: John Cotrina y Phamela Escudero

 INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA DE ENVIGADO Ciencia, educación y desarrollo Vigilada Mineducación	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 13 de 24

Videos de apoyo	Introducción a la geometría analítica https://www.youtube.com/watch?v=al4VWXIQPGU Plano cartesiano https://www.youtube.com/watch?v=VunEAZ-xUAI Distancia entre dos puntos https://www.youtube.com/watch?v=-Kgc07ghqmA Ecuación de la circunferencia en el plano https://www.youtube.com/watch?v=vICf_JIwar4 Secciones cónicas https://www.youtube.com/watch?v=a26ErrkU_-M las curvas cónicas https://www.youtube.com/watch?v=1tDPawAoiC0
Material complementario	Secciones Cónicas GeoGebra https://www.youtube.com/watch?v=U8Nfegn7914 Cómo graficar cónicas (circunferencia, elipse, parábola, hipérbola) con GeoGebra https://www.youtube.com/watch?v=glyIpAcdod8

Tema 2. Introducción a la Geometría Vectorial. (6 semanas)	
Actividades	Por parte del docente: presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo. Por parte del estudiante: Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo
Evaluación Temática 2	Semana 11: Examen corto individual (10%)
Resultados de Aprendizaje.	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Reconocer los elementos básicos de la geometría Vectorial: Vectores, magnitud y dirección, operaciones con vectores. Utilizar los diferentes conceptos relacionados con los elementos básicos de la geometría vectorial en la solución de diversos problemas en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Identifica los conceptos básicos de la geometría Vectorial. Opera eficientemente con vectores e interpreta resultados obtenidos. Aplica El producto escalar y vectorial en la solución de problemas.

Guía de trabajo

Desde el punto de vista físico existen magnitudes claramente distinguibles en su significado, la magnitud es la propiedad que tienen los cuerpos de ser medidos utilizando las cantidades. Hay magnitudes que se definen como escalares y otras que se denominan vectoriales. Las magnitudes escalares simplemente se representan por números reales, a este número se le agrega una unidad que completa su significado; por ejemplo, cuando hablamos de 100 metros, 30 litros. Existen otras magnitudes que, además de su valor como número real, tienen una dirección y un sentido; éstas se denominan magnitudes vectoriales, tenemos el caso de la fuerza o la velocidad.

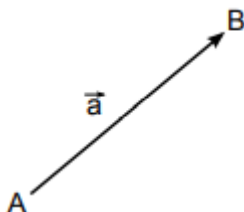
Pregunta orientadora:

¿Por qué es importante el estudio de la geometría vectorial en la formación de ingenieros?

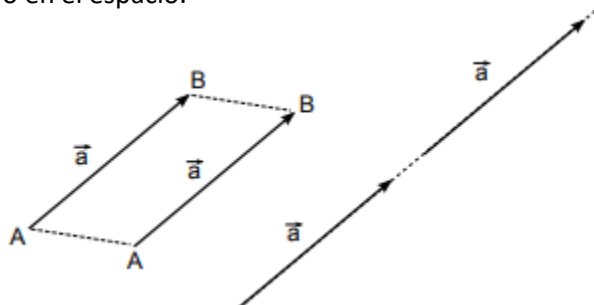
Conceptos básicos

VECTORES LIBRES Y DE POSICIÓN

Si se toma un número real como magnitud y lo dotamos de dirección, es decir un segmento orientado con un ángulo respecto a una referencia convenida o relativa a otro segmento, podemos modelar un nuevo elemento que llamaremos vector, en donde ubicaremos un segmento que sale del punto A (origen o cola) hasta el punto B (final o cabeza), esta distancia nos definirá la magnitud o valor real del vector, también podemos decir que es su módulo, además le agregaremos la representación o gráfico, un sentido o extremo en forma de punta. Las cantidades escalares, que son números reales, sólo poseen magnitud, no tienen dirección.



El módulo (norma, magnitud o longitud) de un vector se expresa, así: $\|\vec{a}\|$ o también como $|\vec{a}|$. La idea de vector libre aparece cuando podemos deslizarlo de forma paralela a él mismo manteniendo su magnitud. El vector libre no posee una posición absoluta en el plano o en el espacio.

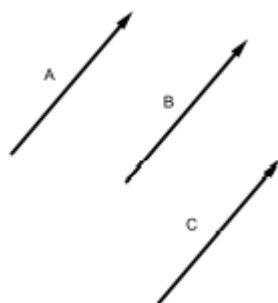


La dirección de un vector es la dirección de la recta que contiene el vector o de cualquier recta paralela a ella.

Existe un término vectorial llamado vector de posición, que son vectores no libres porque el punto inicial es un punto escogido y se le llama punto de origen del vector.

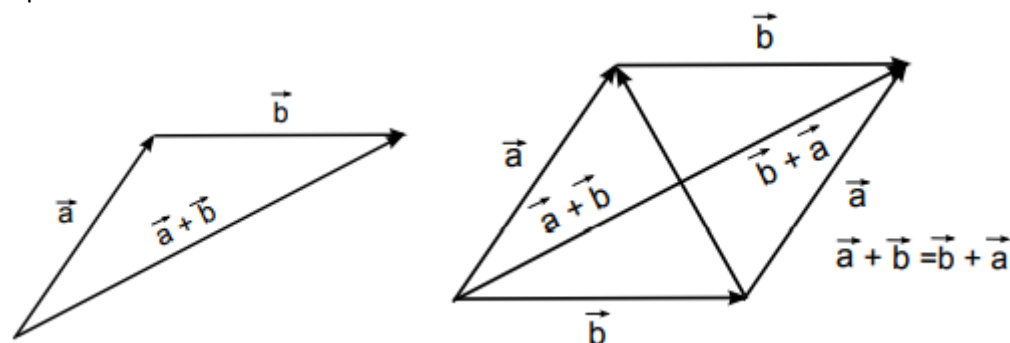
Igualdad de vectores

Decimos que varios vectores son iguales si poseen la misma dirección y magnitud.



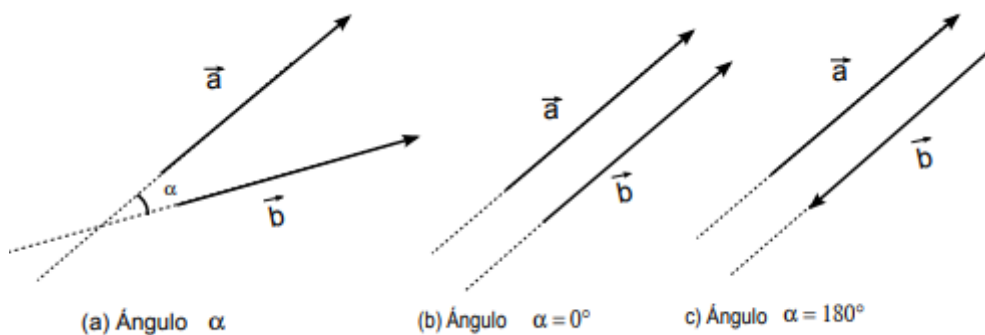
Suma geométrica de vectores

Si se tienen dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con magnitud diferente de cero y en un plano, definimos geoméricamente la suma del vector $\vec{a}$ con el vector $\vec{b}$ cuando colocamos en el final del vector $\vec{a}$ con el origen del vector $\vec{b}$, la resultante es un nuevo vector que parte del origen del vector $\vec{a}$ y termina en el final del vector $\vec{b}$, tal resultante la denotamos como $\vec{a} + \vec{b}$, este procedimiento se llama regla del triángulo; ahora si se forma un paralelogramo con los dos vectores y realizamos la operación suma este proceso se denomina la regla del paralelogramo, puede observarse que $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; siendo esta propiedad denominada conmutativa de la suma de vectores.



Ángulo entre vectores

Si se tienen dos vectores cualesquiera, definimos ángulo entre vectores como el ángulo que se forma por la intersección de las líneas de soporte o de deslizamiento de los vectores, estas líneas imaginarias son la prolongación en la misma dirección de cada vector; si el ángulo es igual a cero los vectores son paralelos en el mismo sentido o si el ángulo es igual a 180° son paralelos, pero en sentido opuesto



Ejercicio Investigativo 1

¿Cómo se realiza la resta entre vectores?

Multiplicación por escalares

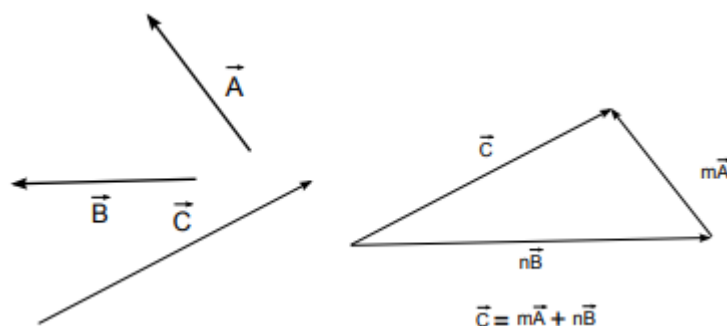
Si se tiene un vector $\vec{A}$ y dado un escalar o un número $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, podemos generar otro vector $\vec{B}$ tal que tenga la misma dirección y sentido del vector $\vec{A}$; esto define el paralelismo entre vectores, ahora si se tiene un vector cuya magnitud es $|\alpha \vec{A}|$, se puede cambiar el sentido del vector $\vec{B}$ si cambiamos $\alpha > 0$ por $\alpha < 0$. Por lo tanto, si tenemos la relación $\vec{B} = \alpha \vec{A}$ esta relación nos está indicando el paralelismo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El vector unitario

Si se tiene un vector $\vec{A}$ cuya magnitud es $|\vec{A}|$, con $\vec{A} \neq 0$, se define como vector unitario a $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$.

Dependencia lineal

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ tres vectores, no paralelos en un plano, y nos proponemos generar (escribir) uno de estos vectores en función de los otros dos.



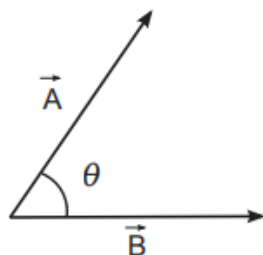
Se desea generar el vector $\vec{C}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para esto buscaremos los escalares m , n tal que $m\vec{A} + n\vec{B} = \vec{C}$. Definiremos la suma $m\vec{A} + n\vec{B}$ como la combinación lineal de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Producto escalar

Si se tienen dos vectores definiremos el producto escalar como la multiplicación de sus respectivos módulos o magnitudes y el coseno del ángulo que forman estos dos vectores; este producto se denomina, también, como producto interno o producto punto.

Definimos el producto punto como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta)$$



Este producto genera un resultado escalar o un número real, el signo del producto depende del signo de $\cos(\theta)$.

$$\text{Si } \theta < 90^\circ \Rightarrow |\vec{A}| |\vec{B}| > 0$$

$$\text{Si } \theta = 90^\circ \Rightarrow |\vec{A}| |\vec{B}| = 0$$

$$\text{Si } \theta > 90^\circ \Rightarrow |\vec{A}| |\vec{B}| < 0$$

De aquí, podemos concluir que dos vectores, de magnitudes diferentes de cero son perpendiculares si su producto interno o escalar es 0.

Propiedades del producto escalar

- **Positividad:** $\vec{A} \cdot \vec{A} \geq 0$, $\vec{A} \cdot \vec{A} = 0$ si y sólo si $\vec{A} = 0$
- **Conmutativa:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ También llamada simetría.
- **Producto por escalares:** $p\vec{A} \cdot q\vec{B} = pq\vec{A} \cdot \vec{B}$ Llamada también Homogeneidad.
- **Distributiva:** $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
- **Módulo o magnitud:** $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$; $\sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = |\vec{A}|$

Vectores Coordenados

Vectores en $\mathbb{R}^2$

Cuando utilizamos un plano de coordenadas cartesianas, se ubica un punto cualquiera (a, b) , y estos puntos, abscisa y ordenada respectivamente, pueden definir un segmento que parte del origen $(0, 0)$ hasta (a, b) que llamaremos vector. Los números a y b se llaman componentes de un vector. El segmento tiene por lo tanto su magnitud y su dirección definidos por: $\sqrt{a^2 + b^2}$ y el ángulo entre el segmento y el eje de las abscisas es $\theta = \arctan(b/a)$, que nos define la dirección, donde $a \neq 0$, si $a = 0$ decimos que su dirección es de 90° respecto al eje de las x , si $a = 0$ y $b = 0$ tenemos el vector cero $\vec{0}$.

Si en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ definimos dos vectores, $\vec{i} = (1, 0)$ y el otro $\vec{j} = (0, 1)$ entonces tenemos las siguientes propiedades:

$$\vec{P} = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0. \quad \text{Ortogonalidad}$$

$$\vec{Q} = (x, y) \text{ y si } \vec{Q} = \vec{P}, \text{ entonces } (x, y) = (a, b) \text{ implica que } a = x, y = b.$$

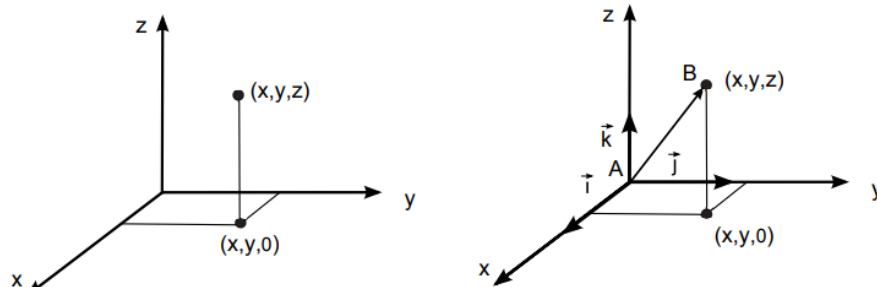
$$\vec{Q} = (x, y) \text{ entonces } k\vec{Q} = k(x, y) = (kx, ky). \quad \text{Escalamiento.}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (a, b) \cdot (x, y) = ax + by. \quad \text{Producto punto o escalar.}$$

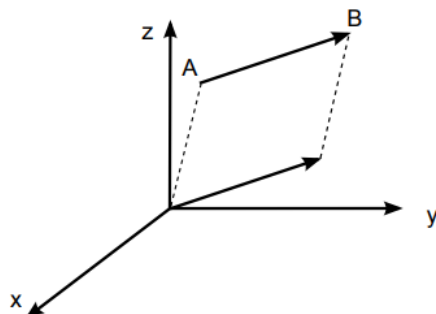
$$\vec{Q} \cdot \vec{Q} = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2. \quad \vec{Q}^2 = |\vec{Q}|^2.$$

Además, el vector $\vec{P} = (p_1, p_2)$ se suma algebraicamente a otro vector así: Si $\vec{A} = (a_1, a_2)$ se tiene que: $\vec{A} + \vec{P} = (a_1, a_2) + (p_1, p_2) = (a_1 + p_1, a_2 + p_2)$

Vectores en $\mathbb{R}^3$



Si tomamos un sistema trirectangular, o sea tal que tres rectas sean perpendiculares entre sí, se puede ubicar un vector que salga de un punto A hasta un punto B, este vector se puede redefinir en coordenadas (x, y, z) . Aparece un nuevo vector unitario sobre el eje de las z , este vector es $\vec{k} = (0, 0, 1)$ los otros dos vectores unitarios se definen así: $\vec{i} = (1, 0, 0)$ que continúa en el eje de las x y el vector unitario $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Si ubicamos un vector desde el punto $A(1, 2, 3)$ hasta el punto $B(4, 5, 8)$, este vector se puede trasladar, sin modificar su dirección, hasta el punto $(0, 0, 0)$ y colocar allí el origen del vector.



Ejercicio investigativo 2.

¿Cómo se calculan algebraicamente la magnitud y la dirección de un vector en $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 1.

A. Hallar el vector resultante de la suma de $\vec{A} + 3\vec{B} - 2\vec{C}$, si se tiene que $\vec{A} = \langle 1, -2 \rangle$, $\vec{B} = \langle 4, -3 \rangle$, $\vec{C} = \langle 10, -5 \rangle$.

B. Hallar $\vec{P} = \vec{A} + t\vec{B}$ si $\vec{A} = \langle 2, -3 \rangle$, $\vec{B} = \langle 4, -3 \rangle$ cuando $t = 1, 3, -7$

C. Determinar el valor de x si se tienen los vectores siguientes y sus relaciones:

$$\langle -1, 5 \rangle = 2\langle x, 7 \rangle + \langle x^2, -2 \rangle$$

D. Si $\vec{A} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\vec{B} = \langle 0, 1, 1 \rangle$ y $\vec{C} = \langle 2, 2, 1 \rangle$ cuando $\vec{D} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$, hallar los valores de x, y, z cuando $\vec{D} = \vec{0}$.

E. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $2\vec{i} + 10\vec{j} - 3\vec{k}$.

F. Hallar el vector unitario en la dirección del vector $a\vec{i} + \sqrt{b}\vec{j} - c\vec{k}$.

G. Hallar los cosenos directores de los siguientes vectores

1. $\vec{P} = \langle 2, -5, 4 \rangle$

2. $\vec{Q} = \langle -1, 1, 3 \rangle$

3. $\vec{R} = \langle 3, 4, 5 \rangle$

H. Hallar los ángulos del triángulo ABC si los vértices tienen coordenadas así: $A(1, 2, 3)$, $B(-1, -2, -3)$ y $C(0, 0, 0)$.

I. Probar que los vectores $\langle \cos \theta, -\sin \theta \rangle$ y $\langle \sin \theta, \cos \theta \rangle$ son perpendiculares.

Ejercicio investigativo 3

¿Cómo se calcula un determinante de orden 2?

¿Cómo se calcula un determinante de orden 3, por desarrollo de cofactores de la primera fila?

Producto Vectorial

El producto cruz es una operación binaria entre dos vectores que da como resultado un tercer vector en el espacio. Si se tiene dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, en $\mathbb{R}^3$, se expresa el producto cruz por la siguiente ecuación:

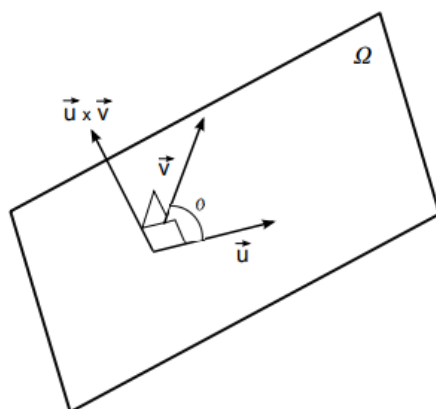
$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Esta expresión se puede escribir de forma abreviada como

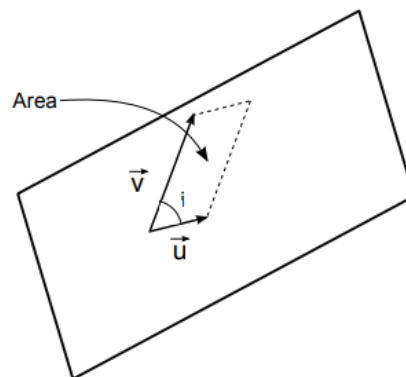
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Siendo los vectores $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$, $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

El vector resultante es perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Como consecuencia de esto, si dos vectores son paralelos el producto cruz entre ellos es el vector cero.



El producto cruz en su magnitud determina el área de un paralelogramo formado por los dos vectores del producto y el ángulo entre ellos.



$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta)$$

Cuando se tienen tres vectores se puede realizar la operación llamada producto mixto o producto triple escalar, se define así:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Este resultado es geoméricamente el volumen de un paralelepípedo. Si este triple producto es cero implicaría que los vectores son coplanares.

Ejercicio 2

A. Calcular el producto cruz de los vectores $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

B. Hallar el área de un triángulo cuyos vértices están en los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, -1)$, $C(2, 1, 2)$

	SECUENCIA DIDACTICA Proceso de docencia	Código: F-DO-0037
		Versión: 01
		Página 20 de 24

C. Hallar el área del triángulo cuyos vértices en el espacio son: $A(2, 4, -5)$, $B(1, 3, 5)$ y $C(-1, 3, -2)$.

D. Calcular el producto triple escalar de los siguientes vectores:

1. $\vec{A} = \langle 2, -3, 5 \rangle$, $\vec{B} = \langle -2, -1, 0 \rangle$ y $\vec{C} = \langle 3, 5, 1 \rangle$

2. $\vec{A} = \langle 1, -1, 1 \rangle$, $\vec{B} = \langle -3, 1, 0 \rangle$ y $\vec{C} = \langle 2, 1, 1 \rangle$

3. $\vec{A} = \langle 3, -3, -5 \rangle$, $\vec{B} = \langle 2, 0, 0 \rangle$ y $\vec{C} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

E. Dados los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(3, 7, 5)$ y $R(2, 1, 1)$ que yacen en un mismo plano, hallar el vector normal a dicho plano.

Referencias:

Geometría vectorial / Valdés Macías, Fernando & Parra Lara, Hernando. Universidad Tecnológica de Pereira. Colección de textos académicos 2014.

Videos de apoyo	Vectores Introducción Qué es un vector y sus características https://www.youtube.com/watch?v=IrTeyzyerjI Magnitud, Norma o Módulo de un Vector longitud o medida https://www.youtube.com/watch?v=KoZ7EhjynOA Representación gráfica de Vectores por componentes https://www.youtube.com/watch?v=LWky_QWCxJQ Producto punto de 2 Vectores https://www.youtube.com/watch?v=YHwUHbIH4Y Producto cruz como determinante 3x3 https://www.youtube.com/watch?v=ey9jPBB3OV8
Material complementario	Cómo graficar vectores Geogebra https://www.youtube.com/watch?v=6dXVc4nZmJA Graficar vectores en Geogebra con magnitud y ángulo de referencia. https://www.youtube.com/watch?v=yXRSQ82wCsl Suma Gráfica de Vectores en GeoGebra. https://www.youtube.com/watch?v=baqYzQDdT9A

Tema 3. Rectas y planos en el espacio. (4 semanas)	
Actividades	Por parte del docente: presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo. Por parte del estudiante: Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo
Evaluación Temática 2	Semana 14: Trabajo en clase en parejas (10%)

Resultados de Aprendizaje.	Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de: Reconocer las ecuaciones de las rectas y planos en el espacio y sabe que elementos necesita conocer para llegar a estas ecuaciones. Identifica las diferentes formas en que se relacionan las rectas y los planos en el espacio. Utilizar los conceptos estudiados sobre rectas y planos en el espacio en la solución de diversos problemas en diferentes contextos.
Criterios de desempeño	Determina las ecuaciones de la recta y los planos en el espacio desde diferentes elementos conocidos. Aplica los conceptos de las rectas y planos en el espacio y las relaciones entre ellos en la solución de problemas.

Guía de trabajo

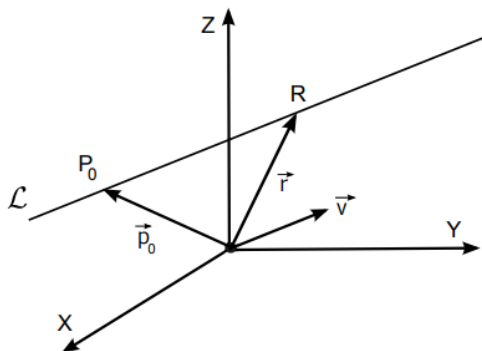
Pregunta orientadora:

¿Por qué es importante reconocer y determinar las ecuaciones de las rectas y los planos en el espacio en la formación de ingenieros?

Conceptos básicos

Ecuación de la recta en el espacio

Se define la línea recta como un conjunto de puntos que mantienen una misma dirección. La línea recta en el espacio requiere de una dirección determinada y un punto fijo por donde pasar, si $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es un vector que nos da la dirección, y P_0 un punto en el espacio que pertenece a la recta, entonces tenemos una recta completamente definida.



La línea recta L seguirá la dirección del vector $\vec{v}$, el punto R se representa por el vector $\vec{r}$ que definirá un punto móvil (x, y, z) ; el punto fijo será P_0 y se representa por $\vec{p}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, el vector $\overrightarrow{P_0R}$ será un múltiplo del vector $\vec{v}$ luego tenemos la ecuación:

$$\vec{r} - \vec{p}_0 = t \vec{v}$$

El escalar t será un parámetro que nos cambiará de posición, sobre la recta, del punto R . Podemos escribir la ecuación paramétrica según las coordenadas:

$$x - x_0 = tv_1$$

$$y - y_0 = tv_2$$

$$z - z_0 = tv_3$$

La ecuación simétrica de una recta en el espacio se deduce de las anteriores despejando el parámetro t .

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t$$

Si en el espacio tenemos dos puntos (x_0, y_0, z_0) y el punto (x_1, y_1, z_1) y entonces se puede escribir la ecuación simétrica de una recta como:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Ejercicio 1

1. Encontrar la recta que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es paralela al vector $2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$
2. Hallar la ecuación de las tres medianas de un triángulo cuyos vértices son los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

Posiciones relativas entre dos rectas:

sean L_1 y L_2 rectas en el espacio con vectores directores v_1 y v_2 respectivamente, entonces:

las rectas son paralelas si y solo si los vectores directores son paralelos y las rectas son perpendiculares si y solo si los vectores directores lo son.

Distancia de un punto a una recta: Dados una recta L con vector director $\vec{v}$ y un punto P exterior a la recta, la distancia del punto P a la recta esta dado por:

$$d(P, L) = \frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{QP}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Ecuación del plano en el espacio

Cuando tenemos un punto en el espacio P_0 y se tiene una dirección definida por el vector $\vec{n}$, se puede hallar un único plano que pase por este punto y que sea perpendicular al vector $\vec{n}$.

Ahora supongamos que tenemos dos puntos en el plano, el punto P_0 definido por $\vec{r}_0$, y el punto P representado por el vector $\vec{r}$, si el punto P_0 tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y el punto P dado por el vector $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$, entonces el vector $\vec{n}$ es perpendicular al vector $\vec{r} - \vec{r}_0$; tal condición se expresa por la ecuación:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Supongamos que el vector normal al plano es $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$, obtenemos entonces la ecuación que define un plano en el espacio

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Pero también se escribe de la forma llamada ecuación estándar del plano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Ejercicio 2

1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ cuyo vector normal es $\vec{M} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$
2. Hallar el plano que contiene los puntos $(3, 2, -3)$, $(5, -1, 2)$ y $(7, 4, -1)$

Angulo entre planos: El ángulo formado entre dos planos es el ángulo que forman sus vectores directores.

Sean π_1 y π_2 dos planos con $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, sus respectivos vectores normales, entonces:

- $\pi_1 \parallel \pi_2$ sí y solo si $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
- $\pi_1 \perp \pi_2$ sí y solo si $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Ejercicio de profundización

1. Representa los puntos siguientes: $P(5, 2, 3)$, $Q(3, -2, 5)$, $R(1, 4, 0)$, $S(0, 0, 4)$ y $T(0, 6, 3)$.
2. Calcula m y n para que los puntos $P(7, -1, m)$, $Q(8, 6, 3)$ y $R(10, n, 9)$ estén alineados.
3. Halla las coordenadas de los puntos medios de los lados del triángulo de vértices $A(1, -3, 5)$, $B(0, 7, 2)$ y $C(-1, 5, 6)$.
4. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por:
 - a) $A(2, 0, 5)$ y $B(-1, 4, 6)$
 - b) $M(5, 1, 7)$ y $N(9, -3, -1)$
 - c) $P(1, 0, -3)$ y $Q(1, 4, -3)$
 - d) $R(0, 2, 3)$ y $S(0, 2, 1)$
5. Dados los puntos $P(1, 7, -2)$, $Q(4, 5, 0)$ y $R(6, 3, 8)$.
 - a) Halla la ecuación del plano que pasa por estos tres puntos
 - b) Halla otros tres puntos del plano.
 - c) Calcula n para que $A(1, n, 5)$ pertenezca al plano.
6. Dados estos tres planos, estudia la posición relativa entre cada dos de ellos:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 8 \\ x + 3y - z &= 5 \\ 2x + 6y - 2z &= 5 \end{aligned}$$

¿Tienen los tres planos algún punto común?

7. Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos $P(3, 1, 0)$, $Q(0, -5, 1)$ y $R(6, -5, 1)$.
8. Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(-5, 4, 1)$ y $C(7, 2, 4)$:
 - a) Determina la recta r que pasa por A y B .
 - b) Halla m y n para que $P(3, m, n)$ pertenezca a r .
 - c) Determina la ecuación del plano π que pasa por A , B y C .
 - d) Halla k para que $Q(k, 7, -1)$ pertenezca a π

Referencias

Geometría vectorial / Valdés Macías, Fernando, Hernando Parra Lara. Universidad Tecnológica de Pereira. Colección de textos académicos 2014.

Videos de apoyo	RECTAS Y PLANOS en el espacio tridimensional https://www.youtube.com/watch?v=uvc8YzQHPd8 Intersección entre dos planos https://www.youtube.com/watch?v=H7d3X5JTR5w&list=PLDtEizret7C4i0_rQ2zGX8CsHW1yGfcrj Intersección entre dos rectas en R3 https://www.youtube.com/watch?v=i-f_v7f1Pvo&list=PLDtEizret7C4i0_rQ2zGX8CsHW1yGfcrj&index=4
Material complementario	Rectas en R3 con Geogebra https://www.youtube.com/watch?v=nzZolsHLnKQ Rectas y planos con GeoGebra 3D https://www.youtube.com/watch?v=hFUHa69MG9s