

|                                                                                                                                                                                                        |                                                                          |                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
|  <p>INSTITUCIÓN<br/>UNIVERSITARIA<br/>DE ENVIGADO</p> <p>Ciencia, educación y desarrollo<br/>Vigilada Mineducación</p> | <p align="center"><b>SECUENCIA DIDACTICA</b><br/>Proceso de docencia</p> | <b>Código:</b> F-DO-0037 |
|                                                                                                                                                                                                        |                                                                          | <b>Versión:</b> 01       |
|                                                                                                                                                                                                        |                                                                          | <b>Página</b> 1 de 30    |

“Las secuencias didácticas son conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos”

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Información general de la asignatura</b><br>Nombre: Álgebra y Trigonometría<br>Programa académico: Ingeniería Informática – Ingeniería Industrial – Ingeniería Electrónica.<br>Código:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Prerrequisitos para el aprendizaje</b><br><b>Académicos:</b> Conocimientos básicos de aritmética.<br><b>Personales:</b> Disposición, deseos de aprender, responsabilidad y disciplina.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>Requerimientos técnicos:</b><br>Correo institucional                                                                                                                                                       |
| <b>Referencias</b><br><br>Stewart, J., Redlin, L., (2017). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. México, D.F., México: Cengage Learning.<br><br>Swokowski, E. W., Cole, J. A., (2017) Precálculo. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México, D.F., México: Cengage Learning.<br><br>Larson, R., (2018). Precálculo. Introducción a las matemáticas universitarias. México, D.F., México: Cengage Learning.<br><br>Miller, J., (2019). Álgebra universitaria y trigonometría. México, D.F., México: McGraw-Hill Interamericana. | <b>Contenido de la asignatura por temáticas</b><br><br><b>Tema 1:</b> Expresiones algebraicas y operaciones.<br><br><b>Tema 2:</b> Ecuaciones, y sistemas de ecuaciones.<br><br><b>Tema 3:</b> Trigonometría. |

### Ruta de aprendizaje

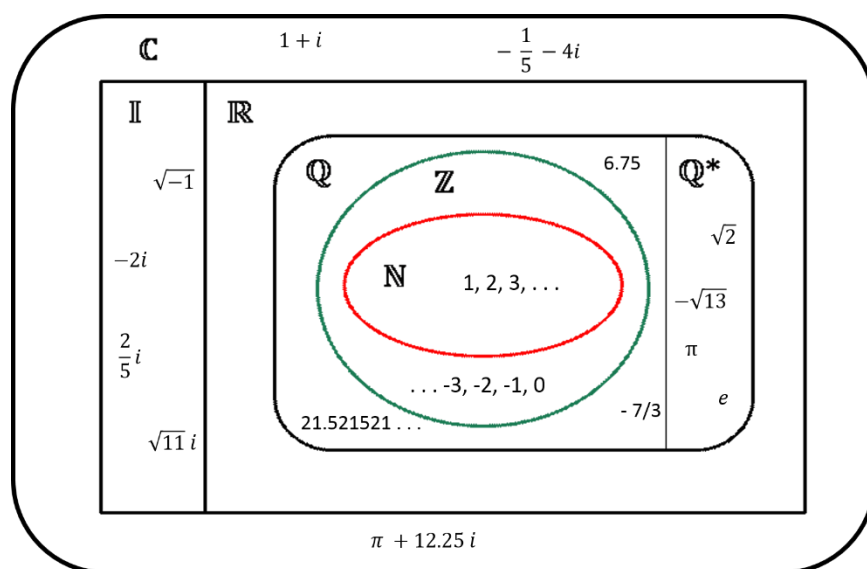
| <b>Tema 1. Expresiones Algebraicas y Operaciones. (7 semanas)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Actividades</b>                                                | <b>Por parte del docente:</b> presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo.<br><b>Por parte del estudiante:</b> Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo                                                             |
| <b>Evaluación Temática 1</b>                                      | <b>Semana 3: Examen corto individual (10%)</b><br><b>Semana 6: Examen corto individual (10%)</b>                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Resultados de Aprendizaje.</b>                                 | Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de:<br>Identificar los conjuntos numéricos, y las diferentes operaciones entre expresiones algebraicas.<br>Conoce los métodos básicos para factorizar expresiones algebraicas.<br>Formular y resolver problemas que requieren operaciones entre números reales para su solución |
| <b>Criterios de desempeño</b>                                     | Establece diferencias entre los conjuntos numéricos.<br>Opera eficientemente con expresiones algebraicas.<br>Factoriza expresiones algebraicas.                                                                                                                                                                                            |

## Guía de trabajo

### Conjuntos numéricos

Los números y sus operaciones ampliaron el campo de las aplicaciones de las matemáticas; actualmente constituyen la base de la teoría de la información. En particular la aritmética de los números reales se aplica en diversos campos, que van desde la formulación de leyes y teorías de las ciencias hasta en la cotidianidad humana.

Los números se clasifican en Naturales ( $\mathbb{N}$ ), Enteros ( $\mathbb{Z}$ ), Racionales ( $\mathbb{Q}$ ), Irracionales ( $\mathbb{Q}^*$ ), Reales ( $\mathbb{R}$ ), Imaginarios ( $\mathbb{I}$ ) y Complejos ( $\mathbb{C}$ ).



### Actividad 1. De construcción de conceptos y discusión

Indique si el número dado o el resultado obtenido en cada uno de los ejercicios 1 – 15 pertenece a los diferentes conjuntos numéricos. Utilice una tabla como la que se muestra a continuación en la que se tienen dos casos ilustrativos.

| Número              | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{Q}^*$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{I}$ | $\mathbb{C}$ |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|----------------|--------------|--------------|--------------|
| $\frac{42}{21}$     | $\in$        | $\in$        | $\in$        | $\notin$       | $\in$        | $\notin$     | $\in$        |
| $-2 + \sqrt{4} - i$ | $\notin$     | $\notin$     | $\notin$     | $\notin$       | $\notin$     | $\in$        | $\in$        |

- 1.212121.....
- $\sqrt[5]{-216}$
- $8 - 3$
- $\sqrt{-25}$
- $-\frac{5}{2} + \frac{2}{5}$

6.  $1.010011000111 \dots$

7.  $\frac{8\pi}{16\pi}$

8.  $-8.\overline{25}$

9.  $2\pi - \frac{7}{2}\pi$

10.  $\sqrt[3]{-8} + 2$

11.  $0$

12.  $(\sqrt{7} - 3i) - (1 + 2i)$

13.  $\sqrt{-1}$

14.  $\sqrt{10}$

15.  $i$

Escribir en la línea de cada enunciado las letras F (Falso) o V (Verdadero) según sea el caso.

16.  $\frac{1}{3}$  es un elemento de  $\mathbb{Z}$

17.  $-\frac{1}{2}$  es un elemento de  $\mathbb{Q}$

18.  $1.5$  es un número racional.

19.  $\frac{8}{0}$  es un elemento de  $\mathbb{Q}$

20.  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{I}$

21.  $4$  es un elemento de  $\mathbb{Z}$  pero no es un elemento de  $\mathbb{N}$ .

22.  $\pi$  es un número real pero no es un número racional.

23. Todo número entero es número racional.

24. Todo número decimal es número real.

25.  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \mathbb{Z}$

26. La intersección del conjunto de números racionales y el conjunto de números naturales es el conjunto de los números naturales.

27.  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{I}$  no tienen elementos en común.

28. Algunos números racionales son números enteros.

29. Algunos números irracionales son números naturales.

30. El producto de dos números irracionales siempre da como resultado un número irracional.

31. Al sumar dos números complejos siempre se obtiene como resultado un número complejo.

En los ejercicios 32 y 33 determine para el conjunto  $S$  cada uno de los siguientes conjuntos: a)  $S \cap \mathbb{N}$ , b)  $S \cap \mathbb{Z}$ , c)  $S \cap \mathbb{Q}$ , d)  $S \cap \mathbb{Q}^*$ .

32.  $S = \left\{ 12, \frac{5}{3}, \sqrt{7}, 0, -38, -\sqrt{2}, 571, \pi, -\frac{1}{10}, 0.666\dots, 16.34 \right\}$

33.  $S = \left\{ -\frac{1}{4}, 26, \sqrt{3}, 1.23, -\sqrt{9}, -0.333\dots, -6214, \frac{1}{2}\pi, \frac{4}{7}, 1 \right\}$

Explique por qué todo número natural es un número entero, pero no todo número entero es un número natural.

Explique por qué todo número entero es un número racional pero no todo número racional es un número entero.

Explique por qué todo número real es un número complejo, pero no todo número complejo es un número real.

Explique por qué la intersección entre los conjuntos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{I}$  no es vacía.

Encuentre dos números racionales cuya diferencia sea un número racional.

Encuentre dos números racionales tal que al sumarlos el resultado sea un número racional y no entero.

Encuentre dos números racionales, que no sean enteros y tales que el duplo de su suma sea un número entero.

### Expresiones Algebraicas

### Potencias y radicales

#### Actividad 2. De construcción de conceptos y discusión

1. Simplificar los siguientes números reales:

- $(x^3)(x^9)$
- $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 2^2 \times 3^3 \times 5^2$
- $2^{10} \div 2^{13}$
- $(5x)(5x) \div 5^3 x^3$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ .
- $4^2 a \div 4a^2$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

2. Determinar los enunciados verdaderos y los falsos, justificando la respuesta en cada caso:

- \_\_\_  $2^3 + 3^3 = 5^3$
- \_\_\_  $2^3 + 3^3 = 6^3$
- \_\_\_  $2^3 \times 3^3 = 6^9$
- \_\_\_  $3^3$  es un factor de  $3^3 + 3^5$
- \_\_\_ Si  $10^{-4} \times 10^{-4} = 10^n$ , entonces  $n = 8$

3. Simplificar cada una de las expresiones y escribir la respuesta utilizando solamente exponentes positivos (suponer que ningún número real variable toma el valor 0):

a.  $3(x^3)^2$

b.  $\left(\frac{p^3 q^0}{r^2}\right)^{-1}$

c.  $(x^2 y^{-2})^{-1} (x^3 y^0)^2$

**4.** Hallar el número representado por cada una de las siguientes expresiones:

a.  $\sqrt{81}$

b.  $-\sqrt{36}$

c.  $\sqrt[5]{-243}$

d.  $\sqrt[6]{64}$

e.  $-\sqrt{0,16}$

**5.** Escribir en forma más simple cada uno de los siguientes radicales:

a.  $\sqrt[3]{40}$

b.  $\sqrt[4]{48}$

c.  $\sqrt[5]{224}$

d.  $\sqrt[6]{10^6 \times 11^{12}}$

e.  $\sqrt[3]{30} \times \sqrt[3]{-400}$

f.  $\sqrt[4]{36} \times \sqrt[4]{180}$

g.  $\sqrt[3]{0,7}$

h.  $\sqrt[3]{-\frac{1}{10^5}}$

i.  $\sqrt[3]{108a^4b^3}$

j.  $\sqrt{5a^3} \div \sqrt{24b^2}$

k.  $\sqrt[10]{m^{11}n^{10}t^{20}}$

l.  $(\sqrt{18x^2y} \times \sqrt{2xy^3}) \div \sqrt{12x^3y^4}$

**6. Simplificar cada una de las siguientes expresiones radicales**

a.  $5\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - \sqrt{3}$

b.  $2\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{16} - 3\sqrt[3]{54}$

**7. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar el resultado (si es posible)**

a.  $(2\sqrt{5})^2$

b.  $(\sqrt[4]{x^2})^3$

c.  $\sqrt[3]{a^2}$

**Expresión algebraica**

Una expresión algebraica es una forma simbólica que emplea constantes, variables, operaciones matemáticas y signos de agrupación como paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }.

Una expresión algebraica no es más que la representación de una o varias operaciones o relaciones matemáticas de números, considerados éstos en forma general, Mientras no se diga algo diferente, las variables representan números reales.

**Término:** Es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios no separados entre sí por los símbolos + o -.

**Clasificación de las expresiones algebraicas:** Las expresiones algebraicas se pueden clasificar según el número de términos que la conforman, así:

- Monomio: expresión algebraica de un solo término.
- Binomio: expresión algebraica de dos términos.
- Trinomio: expresión algebraica de tres términos.
- Polinomio: expresión algebraica con más de un término.

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables. El grado un polinomio es el que posee el término con el mayor grado.

Los elementos de un término son cuatro: el signo, el coeficiente la parte literal y el grado.

Si en un término no aparece el signo -, se asume que es positivo; si no aparece coeficiente se entiende que es 1 y si no tiene parte literal, entonces el término es una constante.

**Términos semejantes:** Dos o más términos con la misma parte literal se denominan términos semejantes.

Los términos semejantes pueden sumarse o restarse reduciéndose a un sólo término. Para ello se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal.

## Actividad practica 1

Tener presente:

| Propiedades de los exponentes en $\mathbb{R}$                                                                                                 | Operaciones entre fracciones                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x^m x^n = x^{m+n}$<br>$(x^n)^m = x^{nm}$<br>$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}, y \neq 0$<br>$0, x \neq 0$                        | $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$<br>$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$<br>$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$<br>$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ |
| $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$<br>$(xy)^m = x^m y^m$<br>$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m}, y \neq 0$ |                                                                                                                                                                                                                               |

Sumar los siguientes polinomios:

- $5a + 2b - 3c$  ;  $7a + 2b + c$  ;  $8a - 4b + 5c$
- $15m^3 - 12q^2 + 23n$  ;  $17m^3 - 12q^2 - 6n$  ;  $-9m^3 + 8q^2 - 15n$
- $a^4 - b^4$  ;  $-a^3b + a^2b^2 - ab^3$  ;  $-3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2$  ;  $-4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4$
- $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$  ;  $-5a + \frac{3}{2}b$  ;  $\frac{3}{4}a - 3b$
- $3(a + b) + (a + b)^3$  ;  $4(a + b)^2 + 5$  ;  $-(a + b)^3 + 8(a + b)^2 - 6$

Restar los siguientes polinomios:

- $ab - cd + 5ac - 4bd$  de  $ab + 2c + ac - 3bd$
- $x^3 - 5x^2 + 2x + 7$  de  $4x^3 + 3x^2 - 4x + 9$
- $\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{3}xy^2 - y^2 + 9x^2y$  de  $-\frac{1}{4}x^2y + \frac{6}{5}y^2 - \frac{2}{7}xy^2 + 3x^3$
- $[(2a + 3b - c - 5d) + (2a - 6b + c - 10d) + (a - 14b + 6c - 13d)]$  de  $[(5a + 3b - 5c + d) - (2a - 8b + c + 3d)]$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

- $(-2xy^2z^3)(4x^4y^3)$
- $(a + 2b)(3c - 2d)$
- $(y^3 - 3y^2 + 3y - 1)(y - 1)$

Realizar las siguientes divisiones. Verifica el resultado utilizando la prueba de la división.

- $10x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 4x$  entre  $2x$
- $4x^4 - 2x^3 - 6 + 14x$  entre  $2x + 3$
- $-\frac{5}{2}a^2 + \frac{5}{3}ab + \frac{10}{3}a$  entre  $-\frac{5}{6}a$

16.  $15a^2 + 17ax - 4x^2$  entre  $3a + 4x$

Efectuar las siguientes operaciones:

17.  $(m^4 - 2m^2 + 3) + \left(\frac{2}{3}m^3 - \frac{3}{8}m + 6\right) + \left(\frac{5}{6}m^3 - \frac{3}{5}m^4 - 8\right) - \left(\frac{2}{5}m^4 + \frac{3}{2}m^3\right)$

18.  $3x^3(2x + 3) - (2x + 1)(x - 3)$

19. Encontrar la expresión que debe sumarse a  $4a - 2b + 4c$ , para obtener  $2a + 3b - 4c$

### Productos Notables

¿Qué es un producto notable?

### Actividad practica 2

Tener en cuenta

|                                                               |
|---------------------------------------------------------------|
| $(p \pm r)^n$ con $n \in N$ (triángulo de pascal)             |
| $(p + r)(p - r) = p^2 - r^2$                                  |
| $(ax \pm b)(cx \pm d) = acx^2 \pm [ad \pm bc]x \pm bd$        |
| $(p \pm r \pm h)^2 = p^2 + r^2 + h^2 \pm 2pr \pm 2ph \pm 2rh$ |

Resolver los siguientes productos notables

|                                                                        |                                 |                              |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|------------------------------|
| 1. $(3x + 2y)^2$                                                       | 2. $(7x - 2y)^3$                | 3. $(w - 3)^4$               |
| 4. $(1 - 5ax)^2$                                                       | 5. $(3a + 2b)(3a - 2b)$         | 6. $(4x^3 + y)^3$            |
| 7. $(5x^3 + y^4)(5x^3 - y^4)$                                          | 8. $(5x + 1 - 2y)(5x + 1 + 2y)$ | 9. $(2x^8 - 5y^9)^2$         |
| 10. $\left(\frac{2}{7}b^3 + 7a\right)\left(\frac{2}{7}b^3 - 7a\right)$ | 11. $(a^x + b^n)(a^x - b^n)$    | 12. $(4a^2 - 2b)(4a^2 - 2b)$ |

### Factorización

Así como es posible descomponer un número en factores primos, también podemos descomponer un polinomio en factores primos. Este procedimiento se conoce con el nombre de factorización.

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

### Factor común y factor común por agrupación

### Actividad 3. De construcción de conceptos y discusión

1. Encuentra el factor que completa cada igualdad:

- a.  $6t^2 = (2t) (?)$
- b.  $48c^5d^4 = (-3c^3d^2) (?)$
- c.  $72h^3k = (-8hk) (?)$
- d.  $9a^2b^4 = (3a^2b^2) (?)$
- e.  $-28r^4s^3 = (-r) (?)$
- f.  $(3a^3b^2)^2 (?) = 18a^6b^7$
- g.  $-35x^3y^5 = (7x^2y)(?)$

**2. Factorizar**

- a.  $24a^2b + 4abc$
- b.  $15x^3y^2 - 10x^2y^3$
- c.  $a^2b^3d - a^2b^2d^2$
- d.  $x^3 - 3x^2 + 4x^4$
- e.  $75(rst^2)^2 + (5r)^3$
- f.  $15a - 27b + 9c$
- g.  $5a - a^2 + a^3$
- h.  $2x^4 + 6x + 8x^3 - 10x^4$
- i.  $20m^3 + 30m^4 - 40m^2 - 50m^5$
- j.  $27a^2b^3 - 18a^4b^5 + 45ab^4$
- k.  $5x^2y^3 + 7xy^4 - 8x^3y^7 - 9x^5y^5$
- l.  $abc - 2a^2d + 3ac - 5a$

**3. Factorizar**

- a.  $3(x + y) + z(x + y)$
- b.  $e(f - g) - 4(f - g)$
- c.  $7(r - s) + t(r - s)$
- d.  $2a(a + 3) - (3 + a)$
- e.  $2x(x - y) + y(y - x)$
- f.  $2u(u - 2v) + v(u - 2v) + (u - 2v)$
- g.  $X(2w - 3v + u) - (2w - 3v + u)$

**4. Factorizar**

- a.  $(3x^2 - 3x) + (2x - 2)$
- b.  $(3x^2 - 12x) - (2x - 8)$
- c.  $(8u^2 + 4u) - (2u + 1)$
- d.  $(2x^2 + 4x) + (3x + 6)$

e.  $(2y^2 - 10y) - (3y - 15)$

f.  $(6x^2 + 10x) - (3x + 5)$

**5. Factorizar agrupando términos:**

a.  $3a + ab + 3c + bc$

b.  $x^2 - 2x + xy - 2y$

c.  $h^2 - hk + hr - kr$

d.  $p^3 - 2p^2 + 4p - 8$

e.  $p^2 - 2pq + pr - 2qr$

f.  $3hk - 2k - 12h + 8$

g.  $4z^3 - 6z^2 - 6z + 9$

h.  $(h^2k + 4k^2) + (h^2k + 4k)$

i.  $x^3 - 3x^2 - x + 3$

j.  $rs + 5r + st + 5t$

k.  $u^2 - 2u + uv - 2v$

l.  $x^2 - 2xy + 4xz - 8yz$

m.  $3a^3 + a^2 + 6a + 2$

**Factorización de trinomios**

**Actividad 4. De construcción de conceptos y discusión**

Factorizar

a.  $x^2 + 6x - 9$

b.  $9x^2 - 24xy + 16y^2$

c.  $64x^2 + 112xy - 49y^2$

d.  $-4x^2 - 20xy + 25y^2$

e.  $225 - 30r + r^2$

f.  $2x^2y - 36xy + 162y$

g.  $5c^2 - 10c + 5$

h.  $4x^2 + 24x - 36$

i.  $16a^2 + 40a + 25$

j.  $25p^2 + 35p + 49$

k.  $v^2 - 28v + 196$

l.  $x^2 - 6x - 9$

m.  $x^2 + 8x + 7$

n.  $y^2 + 7y + 12$

o.  $r^2 + 9r + 20$

p.  $y^2 + 25y + 24$

- q.  $p^2 - 5p + 6$
- r.  $u^2 + 11u + 18$
- s.  $x^2 - 14x + 24$
- t.  $z^2 - 6z + 5$
- u.  $c^2 - 15c + 14$
- v.  $s^2 - 12s + 20$
- w.  $x^2 + 11x + 28$
- x.  $x^2 + 5x + 4$
- y.  $c^2 - 10c + 16$
- z.  $q^2 + 16q + 15$
- aa.  $m^2 + 5m + 6$
- bb.  $f^2 - 12f + 20$

### Factorización de Binomios

#### Actividad 5. De construcción de conceptos y discusión

##### Factorizar

- a.  $a^2 - 1$
- b.  $36x^2 - 25y^2$
- c.  $169m^2 - 196n^2$
- d.  $121h^2 - 144k^2$
- e.  $1 - 100x^2$
- f.  $a^6 - 9b^2$
- g.  $m^8 - n^2$
- h.  $a^4b^6 - c^{10}$
- i.  $a^3 - b^3$
- j.  $a^3 + b^3$
- k.  $a^3 + 1$
- l.  $a^3 - 1$
- m.  $a^6 - b^6$
- n.  $a^{15} + b^9$

## Expresiones Racionales

### Actividad 5. De construcción de conceptos y discusión

1. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a)  $\frac{x^2-2x-15}{x^2-4x-5}$

b)  $\frac{2x^3+x^2-7x-6}{x^4-2x^3-13x^2+14x+24}$

c)  $\frac{m^2-mn}{m^3-m^2n+mn^2-n^3}$

d)  $\frac{3n^2-19n+28}{3n^2-5n-28}$

e)  $\frac{a^2x^2-16a^2}{20a^2+9ax+ax^2}$

2. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

a)  $\frac{10a^2-21ab+9b^2}{3a^2+5ab+2b^2} \div \frac{2a^2-ab-3b^2}{15a^2+ab-6b^2}$

b)  $\frac{6-a-2a^2}{4a^2+3a-10} \times \frac{3a^2+7a-20}{2a^2+5a-12}$

c)  $\left(\frac{x^2+3x}{4x^2-4}\right) \left(\frac{x^2-4x+3}{x^2}\right) \left(\frac{2x^2+2x}{x^2-9}\right)$

d)  $\frac{4n^2-1}{4n^2-9} \div \frac{6n^2+n-2}{6n^2+13n+6}$

e)  $\frac{10+7x-12x^2}{8x^2-2x-15} \div \frac{6x^2-13x+5}{10x^2-13x+4}$

f)  $\frac{x+5}{x^2+2x+1} - \frac{2}{x-5} - \frac{x}{5+4x-x^2}$

g)  $\frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(x+y)}$

h)  $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} - \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

i)  $\frac{1}{2x+y} + \frac{1}{2x-y} - \frac{3x}{4x^2-y^2}$

j)  $\frac{3-2x}{2x+3} - \frac{2x+3}{3-2x} + \frac{12}{4x^2-9}$

### Videos de apoyo

Operaciones combinadas con números enteros | Suma, resta, multiplicación, división y paréntesis

<https://www.youtube.com/watch?v=UbjPCAjUfg>

Eliminar signos de agrupación

[https://www.youtube.com/watch?v=jdqgwzCL\\_PGO](https://www.youtube.com/watch?v=jdqgwzCL_PGO)

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                | <p>Operaciones combinadas con fracciones<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=ebJYzTM5Inc">https://www.youtube.com/watch?v=ebJYzTM5Inc</a><br/>           Operaciones combinadas   Suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=zfX5Jz_ZtZI">https://www.youtube.com/watch?v=zfX5Jz_ZtZI</a><br/>           Multiplicación de expresiones algebraicas<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=ZVUUd0uegog">https://www.youtube.com/watch?v=ZVUUd0uegog</a><br/>           Multiplicación de expresiones algebraicas<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=x0WPaqL-mls">https://www.youtube.com/watch?v=x0WPaqL-mls</a><br/>           Reducción de términos semejantes con fracciones<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=6CyxY1L3knU">https://www.youtube.com/watch?v=6CyxY1L3knU</a><br/>           Qué es factorizar<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=sSfO1CsKJ4g&amp;list=PLeySRPnY35dGY6GX7xO_lruvCIS6NkfR-">https://www.youtube.com/watch?v=sSfO1CsKJ4g&amp;list=PLeySRPnY35dGY6GX7xO_lruvCIS6NkfR-</a><br/>           Factorización los 6 métodos más usados<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=a8CUEopWCNO">https://www.youtube.com/watch?v=a8CUEopWCNO</a></p> |
| <b>Material complementario</b> | <p>¿QUÉ ES UN NÚMERO? ¡No es tan fácil como parece!<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=H9pMUV4leQg">https://www.youtube.com/watch?v=H9pMUV4leQg</a><br/>           Qué son realmente los NÚMEROS REALES?<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ">https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ</a><br/>           ¿Qué son los NÚMEROS COMPLEJOS?<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=LqyBrrgmIro">https://www.youtube.com/watch?v=LqyBrrgmIro</a></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

|                                                                                                                                                                                                           |                                                                                            |                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
|  <p>INSTITUCIÓN<br/>UNIVERSITARIA<br/>DE ENVIGADO</p> <p>Ciencia, educación y desarrollo</p> <p>Vigilada Mineducación</p> | <p align="center"><b>SECUENCIA DIDACTICA</b></p> <p align="center">Proceso de docencia</p> | <p><b>Código:</b> F-DO-0037</p> |
|                                                                                                                                                                                                           |                                                                                            | <p><b>Versión:</b> 01</p>       |
|                                                                                                                                                                                                           |                                                                                            | <p><b>Página</b> 14 de 30</p>   |

| <b>Tema 2. Ecuaciones, y sistemas de ecuaciones. (5 semanas)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Actividades</b>                                               | <p><b>Por parte del docente:</b> presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo.</p> <p><b>Por parte del estudiante:</b> Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo.</p>          |
| <b>Evaluación Temática 2</b>                                     | <p><b>Semana 12: Trabajo en clase (10%)</b></p>                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Resultados de Aprendizaje.</b>                                | <p>Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de:</p> <p>Conoce los diferentes métodos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones.</p> <p>Resuelve problemas en diferentes contextos que implican el planteamiento de ecuaciones, inecuaciones o sistemas de ecuaciones.</p> |
| <b>Criterios de desempeño</b>                                    | <p>Resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas.</p> <p>Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por diferentes métodos e interpreta resultados.</p> <p>Resuelve inecuaciones e interpreta resultados.</p>                                                                                            |

### Guía de trabajo

#### Tema 2: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Las ecuaciones son igualdades algebraicas que guardan una relación entre cantidades cuyos valores son desconocidos. No todas las igualdades algebraicas son ecuaciones. Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades (variables) cuyo valor, de momento, se desconoce. Las ecuaciones codifican relaciones en lenguaje algebraico por lo que son una herramienta muy potente para resolver problemas.

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las variables para que la igualdad sea cierta, o bien averiguar que no tiene solución.

¿Qué es una Ecuación lineal?

#### Actividad Practica 1

Resolver las siguientes ecuaciones lineales

a)  $3x + 23 = 2x + 59$

b)  $x + 12 = 17$

c)  $2x - 4 = x + 9$

d)  $5x - 10 = 4x - 12$

e)  $\frac{2x}{3} = 10$

f)  $3x - 4 = 24 - x$

g)  $\frac{5x}{2} + 2 = 20 + 2$

h)  $5x + 2 = x + 10$

- i)  $1 + 3x = 2x + 7$
- j)  $2 + 7x = 4 - 3x$
- k)  $x - 18 = 2x - 3$
- l)  $-5 - 2x = 3 - 8x - 2$
- m)  $3(x - 7) = 5(x - 1) - 4$
- n)  $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

Resolver los siguientes problemas

- a) Los tres lados de un triángulo equilátero vienen expresados en metros. Si su perímetro es 27 metros, halla la longitud de cada lado.
- b) La suma de cuatro números es igual a 90. El segundo número es el doble que el primero; el tercero es el doble del segundo, y el cuarto es el doble del tercero. Halla el valor de los cuatro números.
- c) El doble de un número menos cinco es nueve. ¿De qué número se trata?
- d) La suma de dos números consecutivos es 55. ¿De qué números se trata?
- e) Un número multiplicado por 5 sumado con el mismo número multiplicado por 6 da 55. ¿Cuál es el número?
- f) Si el lado de un cuadrado se duplica, su perímetro aumenta 40 metros. Calcular la medida del lado del cuadrado
- g) Tres números impares consecutivos suman 81. ¿Cuáles son los números?

### Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación de segundo grado (o ecuación cuadrática) es de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales y  $a$  no puede ser 0. Este tipo de ecuaciones tiene 2 soluciones a las cuales se puede llegar por diferentes métodos.

- Factorización: Se factoriza la expresión cuadrática como producto de 2 expresiones de primer grado. Luego se iguala cada expresión a 0 y se despeja la incógnita en cada caso.

- Fórmula general: Se reemplazan los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  correspondientes a la ecuación en la fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  y de esta forma se encuentran las soluciones de la ecuación.

### Actividad Practica 2

Encontrar los valores de  $x$  que satisfacen las siguientes ecuaciones.

1)  $x(2x - 3) - 3(5 - x) = 83$

- 2)  $(2x + 5)(2x - 5) = 11$
- 3)  $(7 + x)^2 + (7 - x)^2 = 130$
- 4)  $(2x - 3)(3x - 4) - (x - 13)(x - 4) = 40$
- 5)  $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) = 214$
- 6)  $8(2 - x)^2 = 2(8 - x)^2$
- 7)  $\frac{x^2 - 6}{2} - \frac{x^2 + 4}{4} = 5$
- 8)  $\frac{5x - 3}{x} = \frac{7 - x}{x + 2}$
- 9)  $x^2 - 3x = 0$
- 10)  $6x^2 + 42x = 0$
- 11)  $x^2 + ax = 0$
- 12)  $(x - 2)(x - 3) = 6$
- 13)  $(x - 2)(x + 5) = 9x + 10$
- 14)  $(2x + 6)(2x - 6) = (2x + 9)(3x - 4)$
- 15)  $(x + 3)^2 - 8x - 9 = 0$

Resuelve los siguientes problemas:

- a) Encontrar dos números su suma sea 30 y su producto 221.
- b) La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Determina esos números
- c) Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?
- d) Para cercar un terreno rectangular de 750 m<sup>2</sup> se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones del sitio.
- e) Dentro de 30 años la edad de Andrea será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 10 años. ¿Cuántos años tiene Andrea hoy?

### Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad algebraica del tipo:  $ax + by = c$ , donde  $x$  e  $y$  son las incógnitas, y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números conocidos.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y geométricamente representa una recta en el plano cartesiano.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde,  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  son números reales.

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación representa una recta en el plano. Analizar la solución de un sistema de este tipo, implica estudiar la situación de estas rectas en el plano, que pueden ser:

- Secantes, el sistema tiene solución única, se llama Compatible Determinado.
- Coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones, es Compatible Indeterminado
- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama Incompatible.

Métodos algebraicos de resolución de sistemas:

- Sustitución (Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra, se resuelve la ecuación lineal correspondiente).
- Igualación (se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan las expresiones, se resuelve la ecuación lineal correspondiente)
- Reducción (se preparan las dos ecuaciones para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas, pero con distinto signo. Al sumar las ecuaciones nos queda una ecuación con una sola incógnita)

### Actividad practica 3

Resolver los siguientes sistemas:

|                                                            |                                                             |                                                            |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| a. $\begin{cases} X - 2y = 5 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$  | b. $\begin{cases} 3x - 2y = 19 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$   | c. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ X = -20 + 3y \end{cases}$ |
| d. $\begin{cases} 5x - 4y = 0 \\ 10x + 2y = 5 \end{cases}$ | e. $\begin{cases} 2x - 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$ | f. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$    |

Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Siendo  $x, y, z$  las incógnitas y con  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_1, d_2, d_3$  números reales.

Resolver los siguientes problemas

1. Una parcela rectangular tiene un perímetro de 320 m. Si mide el triple de largo que, de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?
2. En un taller hay 154 vehículos entre coches y motocicletas, si el número de ruedas es de 458, ¿cuántas motocicletas y coches hay?
3. Juan ha realizado un examen que constaba de 68 preguntas, ha dejado sin contestar 18 preguntas y ha obtenido 478 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta se resta un punto, ¿cuántas preguntas ha contestado bien y cuántas ha contestado mal?
4. Una empresa tiene 53 empleados en las oficinas A y B, de los cuales hay 21 profesionales. Si una tercera parte de las personas que laboran en la oficina A, y tres séptimos de los que se encuentran en la oficina B son profesionales, ¿cuántos empleados hay en cada oficina?
5. Un panadero vende 2 clases de panecillos: regulares y extradulces. Cada lote de masa para panecillos regulares emplea 50 lb de harina y 2 lb de azúcar. Cada lote de masa para panecillos extradulces utiliza
6. 49 lb de harina y 4 lb de azúcar. El panadero dispone de 690 lb de harina y 48 lb de azúcar. ¿Cuántos lotes de cada tipo de panecillo deberá producir para emplear toda la harina y todo el azúcar?
7. Un ama de casa compra en un supermercado 6 Kg. de café y 3 de azúcar, por lo que paga 1530 pesos. Ante la amenaza de nuevas subidas, vuelve al día siguiente y compra 1 Kg. de café y 10 Kg. de azúcar por lo que paga \$825. No se fija en el precio y plantea el problema a su hijo de 13 años. Este después de calcular lo que su madre hubiera pagado por 6 Kg de café y 60 de azúcar halla el precio de cada artículo. ¿Podrías llegar tú a resolver el problema?
8. Con 1000 pesos que le ha dado su madre, Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidescremada por un total de 960 pesos. Si el paquete de leche entera cuesta 115 pesos y el de semidescremada 90 pesos ¿Cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?
9. En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de patatas por \$835 y 4 Kg de naranjas y 2 Kg de patatas por \$1.285. Calcula el precio de los kilogramos de naranja y patata.
10. Un comerciante de alimentos vende el Kg de azúcar a \$120. Además, tiene café de dos clases; cuando toma 2 Kg de la primera calidad y 3 Kg de la segunda resulta la mezcla a \$75 el Kg y cuando toma 3 Kg de la primera clase y 2 Kg de la segunda entonces resulta la mezcla a \$80 el Kg ¿Cuál es el precio de cada calidad de café?

### Inecuaciones

El conjunto de los números reales es ordenado. Por tal razón, dados los números reales  $a$  y  $b$ , solo puede presentarse una de las siguientes relaciones:

- i.  $a - b < 0$
- ii.  $a - b = 0$
- iii.  $a - b > 0$

Tener presente:

- Si  $m, n \in \mathbb{R}$  tal que  $m > n$ , entonces  $m + c > n + c$  para todo  $c \in \mathbb{R}$ .
- Si  $m, n \in \mathbb{R}$ , y  $m < n$ , entonces:

$$mc < nc, \text{ si } c > 0 \text{ y } mc > nc, \text{ si } c < 0$$

$$\frac{m}{c} < \frac{n}{c}, \text{ si } c > 0 \text{ y } \frac{m}{c} > \frac{n}{c}, \text{ si } c < 0$$

### Intervalos

Sí  $a$  y  $b$  son números reales, tales que  $a < b$ , entonces:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b \wedge x > a\} = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b \wedge x \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b \wedge x \geq a\} = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b \wedge x > a\} = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $(b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $[b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

### Actividad 1. De construcción de conceptos y discusión

Resuelve las siguientes inecuaciones

- $4 - 3x > 7 + 2x$
- $-2x + 3 < 7$
- $3x - 4 \leq 8$
- $-2x + 3 \leq 7$
- $2x - 3 > 0$
- $-\frac{3}{5}x - \frac{1}{4} \leq \frac{2}{7}$
- $3x - 5 < 10$
- $7 - 2x \geq -3$
- $5 + 3x > 6x - 4$
- $2 + 7x < 3x - 10$
- $6x - 7 > 1$
- $2(x + 2) < 5$
- $3x - 10 \geq 5x$

**n.**  $4x + 10 > 4 - 2x$

**o.**  $x + 4 < 3$

**p.**  $x + \frac{1}{2} < 2 + \frac{x}{4}$

**q.**  $3x - \frac{5}{2} > \frac{1}{2}x$

**r.**  $\frac{1}{3}y - 9 \leq 2y - 4$

**s.**  $-7 \leq 2x + 1 \leq 19$

**t.**  $-5 < x - 3 \leq -3$

**u.**  $\sqrt{2} + 1 < 3x + 1 < 7$

**v.**  $-3 \leq -x < 2$

**w.**  $100 > 400 - 6x > 10$

**x.**  $2 \leq \frac{1}{2}x - 6 \leq 8$

**y.**  $7 < 3 - \frac{1}{2}x \leq 8$

**z.**  $-5 \leq 3x + 4 < 13$

**aa.**  $\frac{1}{2} \leq 2x - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4}$

**bb.**  $\frac{3}{7} \leq 3x - \frac{1}{5} \leq \frac{2}{5}$

**cc.**  $x^2 + 2x - 15 > 0$

**dd.**  $x^2 + 3x + 2 > 0$

**ee.**  $x^2 - 3x + 2 > 0$

**ff.**  $4x^2 - 4x + 1 < 0$

**gg.**  $4x^2 + 9x - 9 < 0$

**hh.**  $x^2 - 16 < 0$

**ii.**  $x^2 + 6x + 9 \geq 0$

**jj.**  $x^2 + 9x + 20 < 0$

**kk.**  $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$

**ll.**  $2x^2 - x - 1 < 0$

**mm.**  $3x^2 + 2x - 5 > 0$

**nn.**  $2x^2 + 9x + 4 \leq 0$

**oo.**  $8x^2 - 22x + 15 \geq 0$

**pp.**  $25x^2 + 15x + 2 > 0$

**qq.**  $9x^2 - 36x + 1 \leq 0$

**rr.**  $x(x - 5) < 0$

**ss.**  $(3x - 1)(2x + 3) > 0$

**tt.**  $(x + 1)(x - 2) < 0$

**uu.**  $\frac{x-3}{x+2} < 0$

**vv.**  $\frac{x+5}{x} \geq 0$

**ww.**  $\frac{2x+6}{x-3} \leq 0$

**xx.**  $\frac{x+1}{x-1} + 2 \geq 0$

**yy.**  $\frac{2x-3}{5x+2} \geq -2$

**zz.**  $\frac{x-1}{3x+2} \geq 0$

**aaa.**  $\frac{x(x-1)}{x+5} \geq 0$

**bbb.**  $\frac{3x^2-2x}{3x-2} \leq -2$

**ccc.**  $|x| < 2$

**ddd.**  $|x-2| < 1$

**eee.**  $|x-5| < 1$

**fff.**  $\left| \frac{x+2}{2} \right| \leq 1$

**ggg.**  $|x-1| < 1$

**hhh.**  $|2x+1| \geq 5$

**iii.**  $\left| \frac{7-3x}{2} \right| \leq 1$

**jjj.**  $|x-10| < 0,3$

**kkk.**  $|25x-8| > 7$

**lll.**  $|2x-7| \leq 0,01$

**mmm.**  $\left| \frac{2x-1}{x} \right| > 2$

**nnn.**  $|4x-5| = 3$

**ooo.**  $|x+6| = 2$

**ppp.**  $|x+1| = |x+2|$

**qqq.**  $|3x-4| = |2x+1|$

rrr.  $\left| \frac{x}{3} - 2 \right| \leq 4$

sss.  $\left| \frac{3}{x} - 2 \right| \leq 4$

ttt.  $\left| \frac{4}{x} \right| < 3$

uuu.  $\left| \frac{x}{x+2} \right| \leq 2$

vvv.  $\left| \frac{x}{x-3} \right| \leq 5$

### Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Tenga en cuenta que:

Para cualquier par de números reales  $a, b > 0, a, b \neq 1$ :

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = a^x / a^y$$

$$a^{-x} = 1/a^x$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

### Actividad practica 4

Simplifique las siguientes expresiones.

1.  $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{50}}$

2.  $(e^{\sqrt{2}})^{\sqrt{50}}$

3.  $2^{\sqrt{12}} \cdot 2^{\sqrt{27}}$

4.  $(e^{\sqrt{12}})^{\sqrt{27}}$

5.  $(5^{\sqrt{15}})^{\sqrt{6}}$

6.  $5^{\sqrt[3]{x}} 5^{\sqrt[3]{x^2}}$

7.  $(10^{\sqrt{10}})^{\sqrt{5}}$

8.  $(10^{\sqrt{3}x})^{\sqrt{15}x}$

9.  $\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{18}}}$

10.  $\frac{250^{\sqrt{5}}}{10^{\sqrt{20}}}$

11.  $\frac{3^{\sqrt{45}}}{9^{\sqrt{20}}}$

12.  $\frac{14^{\sqrt{98}}}{28^{\sqrt{72}}}$

13.  $\frac{e^2 \cdot e^{\sqrt{54}}}{e^{\sqrt{24}}}$

14.  $\left( \frac{e^{\sqrt{14}}}{e^3 \cdot e^{\sqrt{7}}} \right)^2$

Completar la siguiente tabla

| FUNCION EXPONENCIAL       | FUNCION LOGARITMICA |
|---------------------------|---------------------|
| $3^{(3)} = 27$            |                     |
| $a^{(b)} = c$             |                     |
| $5^{(-2)} = \frac{1}{25}$ |                     |
| $(a+b)^{(c+1)} = w$       |                     |

|  |                   |
|--|-------------------|
|  | $\ln(e^5) = 5$    |
|  | $\log_2(16) = 4$  |
|  | $\log(10000) = 4$ |

Resolver las siguientes ecuaciones.

- |                                                                             |                                              |                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 15. $\log_2(\log_3 x) = 4$                                                  | 16. $x^{\log_3 x} = 81$                      | 17. $x^{\log x} = 10\,000x$                |
| 18. $\log x^2 = (\log x)^2$                                                 | 19. $\log(x^3) = (\log x)^3$                 | 20. $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$        |
| 21. $(25^{x-3})^6 (125^{2-3x})^2 = 625$                                     | 22. $m^{8x-5} = m^{5x+7}$                    | 23. $\log_x 27 = 3$                        |
| 24. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} \left(\frac{8}{3}\right)^{2x} = 2^{x-3}$ | 25. $a^x - a^7 = 0$                          | 26. $(3^x)^{x-4} = \frac{1}{27}$           |
| 27. $10^{2x-1} - 10^x = 0$                                                  | 28. $6^{3\sqrt{x}-2} - 36^{3\sqrt{x}-2} = 0$ | 29. $\log_2 x = 3$                         |
| 30. $0.25^{x+1} = 0.125^{x-1}$                                              | 31. $\log_{\frac{3}{4}} x = 2$               | 32. $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$            |
| 33. $a^{5x-3} = a^{14+5x} \cdot a^{8x+7}$                                   | 34. $\log_x \frac{1}{4} = 2$                 | 35. $\log_3 \frac{1}{81} = x$              |
| 36. $2 \log(x+5) = \log(x+7)$                                               | 37. $\log_{0.01} 0.1 = x$                    | 38. $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{128} = x$ |
| 39. $\log \sqrt{x-1} = \log(x+1) - \log \sqrt{x+4}$                         | 40. $\log_x 4 = -\frac{2}{5}$                | 41. $\frac{\log(7+x^2)}{\log(x-4)} = 2$    |
| 42. $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x+1) = 2$                                     | 43. $(\log x)^2 - 3 \log x = 2$              | 44. $5^{2x-3} = 2^{2-4x}$                  |

#### Videos de apoyo

Solucionar ecuaciones lineales  
<https://www.youtube.com/watch?v=qaDV-0I1lek&list=PLeYSRPnY35dGIC7UWuH0zUDm8BtFXics9&index=6>

Cómo solucionar ecuaciones de primer grado con fracciones  
<https://www.youtube.com/watch?v=qud71ShXTK4&list=PLeYSRPnY35dGIC7UWuH0zUDm8BtFXics9&index=10>

Solución de ecuaciones Racionales  
<https://www.youtube.com/watch?v=94YO5WzoUJI&list=PLeYSRPnY35dGIC7UWuH0zUDm8BtFXics9&index=13>

Ecuación cuadrática por factorización  
<https://www.youtube.com/watch?v=PTJx4W-lQbE>  
<https://www.youtube.com/watch?v=ohWbnp0GQZQ>

Ecuación cuadrática por fórmula general  
<https://www.youtube.com/watch?v=BxrJmKdPHRs>

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 | Método de Sustitución  
[https://www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&start\\_radio=1&rv=LTfv1G2iYuQ&t=9](https://www.youtube.com/watch?v=LTfv1G2iYuQ&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&start_radio=1&rv=LTfv1G2iYuQ&t=9)

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 | Método de igualación  
<https://www.youtube.com/watch?v=apPXOIznRhg&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=3>

Sistemas de ecuaciones 2x2 | Método de Reducción  
<https://www.youtube.com/watch?v=UMNcW4hjQK8&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=5>

Inecuaciones de Primer Grado – Lineales

|                                                                                                                                                                                                           |                                                              |                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
|  <p>INSTITUCIÓN<br/>UNIVERSITARIA<br/>DE ENVIGADO</p> <p>Ciencia, educación y desarrollo</p> <p>Vigilada Mineducación</p> | <p><b>SECUENCIA DIDACTICA</b></p> <p>Proceso de docencia</p> | <p><b>Código:</b> F-DO-0037</p>      |
|                                                                                                                                                                                                           |                                                              | <p><b>Versión:</b> 01</p>            |
|                                                                                                                                                                                                           |                                                              | <p>Página <b>24</b> de <b>30</b></p> |

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                       | <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=CkVXbU-PNRs&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;start_radio=1&amp;rv=CkVXbU-PNRs&amp;t=0">https://www.youtube.com/watch?v=CkVXbU-PNRs&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;start_radio=1&amp;rv=CkVXbU-PNRs&amp;t=0</a></p> <p>Resolver ecuaciones exponenciales con logaritmos</p> <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=SBuO5i0jJ6A">https://www.youtube.com/watch?v=SBuO5i0jJ6A</a></p> <p>Ecuaciones exponenciales</p> <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=XdaB464Gt4M&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;index=2">https://www.youtube.com/watch?v=XdaB464Gt4M&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;index=2</a></p> <p>Propiedades de los Logaritmos</p> <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=EiOFGGhWLIY&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;index=3">https://www.youtube.com/watch?v=EiOFGGhWLIY&amp;list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&amp;index=3</a></p> |
| <p><b>Material complementario</b></p> | <p>Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas</p> <p><a href="https://www.youtube.com/watch?v=kgtFQTflh_I">https://www.youtube.com/watch?v=kgtFQTflh_I</a></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

**Tema 3. Trigonometría. (4 semanas)**

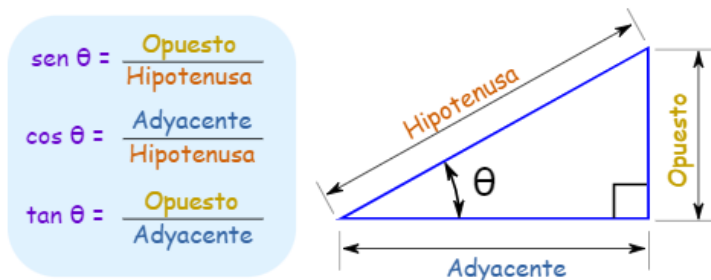
|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Actividades</b>                | <p><b>Por parte del docente:</b> presentación conceptual de las temáticas y orientación para la realización de actividades propuestas en la guía de trabajo.</p> <p><b>Por parte del estudiante:</b> Estudio permanente y Realización de actividades propuestas en la guía de trabajo</p> |
| <b>Evaluación Temática 2</b>      | <b>Semana 14: Examen corto individual (10%)</b>                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Resultados de Aprendizaje.</b> | <p>Al finalizar esta unidad el estudiante estará en capacidad de:</p> <p>Identifica las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.</p> <p>Conoce las relaciones trigonométricas básicas.</p> <p>Conoce las identidades trigonométricas básica.</p>                            |
| <b>Criterios de desempeño</b>     | <p>Resuelve ecuaciones trigonométricas.</p> <p>Prueba identidades trigonométricas.</p> <p>Aplica las relaciones trigonométricas en la solución de problemas.</p>                                                                                                                          |

**Guía de trabajo**

La trigonometría estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Se aplica en el estudio de la física, la astronomía, la geografía, la ingeniería e infinidad de áreas de conocimiento y aplicación que se relacionan con las medidas y relaciones entre los ángulos y las distancias. Es una herramienta indispensable en la solución de problemas que involucran triangulación, navegación y construcciones civiles.

**Triángulos rectángulos**

Un triángulo se llama triángulo rectángulo si uno de sus ángulos es un ángulo recto, esto es, un ángulo de  $90^\circ$ . Sea  $\theta$  uno de los ángulos agudos del triángulo. Se pueden clasificar los tres lados relativos a  $\theta$  : lado adyacente, lado opuesto e hipotenusa como muestra en la figura. En términos de estos lados se introducen las tres razones fundamentales de la trigonometría: el seno de  $\theta$  , el coseno de  $\theta$  y la tangente de  $\theta$  .



### Actividad 1. De construcción de conceptos y discusión

Resolver los siguientes triángulos rectángulos ABC (recto en C)

1.  $a = 5m$  ,  $c = 8m$
2.  $B = 20^\circ$  ,  $c = 19cm$
3.  $a = 32.46cm$  ,  $b = 25.78cm$
4.  $A = 24.2^\circ$  ,  $c = 16.3pies$
5.  $c = 8m$  ,  $a = 4.5m$
6.  $a = 15cm$  ,  $b = 25cm$
7.  $A = 25^\circ$  ,  $c = 27pies$
8.  $c = 30m$  ,  $a = 7m$

Resolver los siguientes problemas

1. Para medir la altura de un edificio se toman dos visuales desde dos puntos situados a un costado del edificio y separados 60 metros entre sí. El ángulo de elevación de la primera es de  $35^\circ$  y el de la segunda es de  $28^\circ$ . ¿Cuál es la altura del edificio?
2. El edificio Empire State tiene 1250 pies de altura. ¿Cuál es el ángulo de elevación de su último piso desde un punto de la calle que está a 5280 pies desde la base del edificio?
3. Cuando el ángulo formado por el nivel del suelo y el sol es de  $29^\circ$ , un asta proyecta una sombra de 40 metros. Obtener la altura del asta.
4. En un punto P el ángulo de elevación de la cima de una colina es de  $36.3^\circ$ . en un punto Q en la misma recta horizontal formada por P y el pie de la colina, y que está a 60 m de P, el ángulo de elevación es de  $24.5^\circ$ . calcular la altura de la colina o cerro.

5. Una escalera de 10m de longitud se apoya contra una pared vertical y forma un ángulo de  $45^\circ$  con el piso. El extremo que está sobre la pared se desliza verticalmente hacia abajo formando un ángulo de  $30^\circ$  con el piso; hallar el desplazamiento horizontal y vertical de la escalera
6. Para medir el ancho de un río sin cruzarlo, un topógrafo se sitúa en la orilla y mira derecho hacia un árbol en la orilla opuesta. A continuación, el topógrafo camina 100 metros por la orilla y vuelve a mirar el mismo árbol, midiendo un ángulo de  $50^\circ$  desde la orilla hasta su línea de visión al árbol. ¿cuál es el ancho del río?
7. Un hombre ubicado a 150m de la base de un edificio observa que el ángulo entre el suelo y la parte superior del edificio es de  $50^\circ$ , calcular la altura del edificio.

Algunas identidades trigonométricas básicas

De definición y reciprocas

$$\begin{array}{ll} \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} & \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \\ \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} & \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \end{array}$$

Pitagóricas

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

### Actividad practica 1

Verifique las siguientes identidades trigonométricas:

a)  $\text{sen } \theta \cot \theta = \cos \theta$

b)  $\frac{\csc \theta}{\sec \theta} = \cot \theta$

c)  $\frac{\text{sen } \theta + \tan \theta}{\csc \theta + \cot \theta} = \text{sen } \theta \tan \theta$

d)  $\frac{\cot \theta - \tan \theta}{\text{sen } \theta \cos \theta} = \csc^2 \theta - \sec^2 \theta$

Comprueba si son ciertas las identidades siguientes:

- a)  $\operatorname{sen} \alpha \cot \alpha \sec \alpha = 1$
- b)  $\sec^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1) + \tan^2 \alpha = 0$
- c)  $\tan \alpha \cot(-\alpha) + 1 = 0$

Verifique las siguientes identidades:

- a)  $\tan x \csc x = \tan x \operatorname{sen} x + \cos x$
- b)  $\frac{1 - 2 \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \tan x - \cot x$
- c)  $\frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{\csc x + \cot x} = \operatorname{sen} x \tan x$

### Ecuaciones Trigonómicas

Tener presente:

Razones Trigonómicas de ángulos especiales

| grados                      | 0°   | 30°                   | 45°                  | 60°                   | 90°             | 180°  | 270°             |
|-----------------------------|------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------|-------|------------------|
| radianes                    | 0    | $\frac{\pi}{6}$       | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$       | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\operatorname{sen} \theta$ | 0    | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 1               | 0     | -1               |
| $\cos \theta$               | 1    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$         | 0               | -1    | 0                |
| $\tan \theta$               | 0    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 1                    | $\sqrt{3}$            | n.d.            | 0     | n.d.             |
| $\csc \theta$               | n.d. | 2                     | $\sqrt{2}$           | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 1               | n.d.  | -1               |
| $\sec \theta$               | 1    | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$           | 2                     | n.d.            | -1    | n.d.             |
| $\cot \theta$               | n.d. | $\sqrt{3}$            | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 0               | n.d.  | 0                |

## Actividad practica 2

Resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes:

- a)  $\text{sen}x=1$
- b)  $\text{cos}x=-1$
- c)  $\text{tag}x=\sqrt{3}$
- d)  $\text{sen}x=-1$
- e)  $2\cos^2 x=\cos 2x$
- f)  $5\text{sen}x=2$
- g)  $1+\text{sen}2x=(\text{sen}x+\text{cos}x)^2$
- h)  $\cos 2x=1+4\text{sen}x$
- i)  $\text{tg}^2 x-3\text{tg}x+2=0$
- j)  $\text{sen}(2x)-\text{sen}x=0$
- k)  $2\cos^2 x+\cos x-1=0$
- l)  $\text{sen}x+\cos x=0$
- m)  $\text{tag}(x+20^\circ)=1$
- n)  $\text{sen}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-1}{2}$

Resuelve las ecuaciones:  $(0 \leq x \leq 2\pi)$

- a)  $\text{sen}(3x)-\text{sen}30^\circ=0$
- b)  $\text{sen}x=1+2\cos^2 x$
- c)  $\sec x+\text{tag}x=0$
- d)  $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2}$
- e)  $6\cos^2 x+6\text{sen}^2 x=5+\text{sen}x$
- f)  $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$
- g)  $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

## Videos de apoyo

Cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa  
<https://www.youtube.com/watch?v=FUMlQtJfrHo&list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1>  
 Trucos para memorizar las razones trigonométricas  
<https://www.youtube.com/watch?v=W4DpA-puWgw&list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=2>  
 Solucionar un triángulo rectángulo  
<https://www.youtube.com/watch?v=nGS1glInproM&list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&index=11>

|                                                                                                                                                                                                        |                                                           |                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------|
|  <p>INSTITUCIÓN<br/>UNIVERSITARIA<br/>DE ENVIGADO</p> <p>Ciencia, educación y desarrollo<br/>Vigilada Mineducación</p> | <p><b>SECUENCIA DIDACTICA</b><br/>Proceso de docencia</p> | <b>Código:</b> F-DO-0037      |
|                                                                                                                                                                                                        |                                                           | <b>Versión:</b> 01            |
|                                                                                                                                                                                                        |                                                           | Página <b>30</b> de <b>30</b> |

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Material complementario</b> | <p>Trigonometría uso correcto de la calculadora   Fx 82, 95, 570 MS y similares<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=4mpKZMrFauw&amp;list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&amp;index=5">https://www.youtube.com/watch?v=4mpKZMrFauw&amp;list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&amp;index=5</a></p> <p>Truco para memorizar seno, coseno y tangente de 30°, 45° y 60°<br/> <a href="https://www.youtube.com/watch?v=9YnxrgCXI9g&amp;list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&amp;index=17">https://www.youtube.com/watch?v=9YnxrgCXI9g&amp;list=PLeYSRPnY35dEAlFYvOhtD2cztVuq15qw1&amp;index=17</a></p> |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|